Coeficientes de Clebsch-Gordon e matrizes de Rotação:

Dado um operador de Rotação $D^{(j_1)}(R)$ que pertence ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1^{(J_1 \to \text{fixado})}$ e analogamente $D^{(j_2)}(R)$; podemos analisar essa rotação no ponto de vista de $\mathcal{H}_1^{(J_1)} \otimes \mathcal{H}_2^{(J_2)}$

Ou seja: $\underline{D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)}$ → perceba que faz referência ao mesmo $\underline{R \in SO(3)}$; logo trata-se da mesma rotação

Temos que para uma certa escolha de base em $\mathcal{H}_1^{(J_1)} \otimes \mathcal{H}_2^{(J_2)}$ a transformação $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$ é redutível → matriz bloco diagonal

$$\begin{bmatrix} \boxed{D^{(j_1+j_2)}} & & & \\ & \boxed{D^{(j_1+j_2-1)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{D^{|j_1-j_2|}} \end{bmatrix}$$

→ Representação Irredutível de $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$

↳ Similar ao caso de apenas um momento angular

Isso pode ser escrito como: $\underline{D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \otimes D^{(j_1+j_2-1)} \otimes \cdots \otimes D^{(|j_1-j_2|)}}$

Em termos dos elementos de matriz; temos a expansão conhecida como Série de Clebsch-Gordon:

$$\underbrace{D^{(j_1)}_{m_1 m_1'}(R)\, D^{(j_2)}_{m_2 m_2'}(R) = \sum_j \sum_m \sum_{m'} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; j m' \rangle\, D^{(j)}_{m m'}(R)}$$

↑ de $j = |j_1 - j_2|$ a $j_1 + j_2$

Operadores Tensoriais:

↳ operadores baseados em como se transformam dado o operador de rotação; pode ser visto também como as relações de comutação com o operador de momento angular $\vec{J}$.

Um vetor clássico $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ se transforma como:

$$V_i \to \sum_j R_{ij} V_j \quad ; \quad R \in SO(3) \text{ matriz de rotação.}$$

↑ Exigir que o mesmo seja válido para o valor esperado de um operador vetorial $\vec{V}$

Dado um estado $|\alpha\rangle$ arbitrário:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow D(R)|\alpha\rangle$$

O valor esperado de V_i de $\vec{V}$ será:

$$\langle \alpha | V_i | \alpha \rangle = \langle \alpha | D^\dagger(R) V_i D(R) | \alpha \rangle = \sum_j R_{ij} \langle \alpha | V_j | \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{D^\dagger(R)\, V_i\, D(R) = \sum_j R_{ij} V_j}$$

→ Se olharmos para o caso de uma rotação infinitesimal; chegamos que $\vec{V}$ deve satisfazer:

Def de Um Operador Vetorial →

$$\boxed{[V_i, J_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} V_k}$$

$\Rightarrow$ V_i se transformará com:

$$\underline{\exp\left(\frac{i J_j \phi}{\hbar}\right) V_i \exp\left(\frac{-i J_j \phi}{\hbar}\right)}$$

Classicamente definimos um Tensor por:

$$T_{ijk\ldots} = \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \ldots R_{ii'} R_{jj'} \ldots T_{i'j'k'} \quad ; \quad \underline{\# \text{ índices} \equiv \text{ordem do Tensor}}$$

e R uma certa matriz de rotação $\rightarrow$ $\boxed{\text{Tensor Cartesiano}}$

Se Transforma como o produto da transf. de 2 vetores

Uma construção simples de ordem 2 recebe o nome de diádico $\equiv$ "produto de 2 vetores" ; $\boxed{T_{ij} \equiv U_i V_j}$

Total de 9 componentes

Tensor Cartesiano $\rightarrow$ Redutível (Consegue ser escrito por meio de objetos que são mais simples)

$\downarrow$ podem gerar complicações a se trabalhar c/ el

Entretanto, há outro tipo de tensor que é mais benéfico de se trabalhar os chamados Tensores Esféricos Irredutíveis

Um operador de Tensor Esférico é um tensor de rank $\underline{k}$ c/ $2k+1$ componentes $\underline{\underline{T_k^q}}$ onde $\underline{q = -k, \ldots, k}$ que perante uma rotação as componentes se transformam como:

$$T_k^q \rightarrow \boxed{D(R) T_k^q D(R)^\dagger = \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q}(R) T_k^{q'}}$$

$\rightarrow$ note que é como um autoestado do momento angular se transforma perante uma rotação:

Considerando o autoestado $|kq\rangle \rightarrow D(R)|kq\rangle$

$$D(R)|kq\rangle = \sum_{k'} \sum_{q'} |k'q'\rangle \langle k'q'| D(R) |kq\rangle$$

$$= \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q} |kq'\rangle$$

irredutível

Tomando rotações infinitesimais é possível mostrar que:

$$\begin{cases} [J_\pm, T_k^q] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, T_k^{q\pm 1} \\ [J_z, T_k^q] = \hbar q\, T_k^q \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ a comutação é como se J agisse em $|kq\rangle$

Imagine agora um estado genérico descrito por l, m, e outros parâmetros que aglomeramos em $\alpha \rightarrow \underline{|\alpha l m\rangle}$

Vamos agora agir com T_k^q e rodar esse estado por $\underline{D(R)}$ e analisar como ele se transforma:

$$D(R) T_k^q |jm\rangle = \text{Uma vez que a transf. é unitária; } DD^\dagger = D^\dagger D = \mathbb{1} \Rightarrow D(R) T_k^q \underbrace{D^\dagger(R) D(R)}_{\mathbb{1}} |jm\rangle = \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q} T_k^{q'} \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm} |jm'\rangle$$

$$= \sum_{q'} \sum_{m'} D^{(k)}_{q'q} D^{(j)}_{m'm} T_k^{q'} |jm'\rangle$$

Sabemos como esses dois objetos se transformam.

$$\Rightarrow \boxed{D(R)\left[T_K^q |jm\rangle\right] = \sum_{q'}\sum_{m'} D^{(k)}_{q'q} D^{(j)}_{m'm}\left[T_K^{q'}|jm'\rangle\right]}$$ $\rightarrow$ $T_K^q|jm\rangle$ transforma por rotação analogamente a $|kq\rangle \otimes |jm\rangle$

$\hookrightarrow$ A ação de T_K^q sobre $|jm\rangle$ adiciona momento angular $(\underset{\approx}{K}, \underset{\approx}{q})$ ao sistema, com $K \leftrightarrow j$ e $q \leftrightarrow m$.

> **Nota:** Às vezes é possível encontrar T_q^K quanto T_K^q; são a mesma coisa. K sempre é o rank e q o índice da componente.

Tais tensores obedecem uma regra de seleção (Selection Rule) para o valor de m:

$$\langle j'm' | T_q^k | jm\rangle = 0 \text{ se } m' \neq q+m$$

Prova:

Temos que $[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k \Rightarrow \langle j'm'| \overbrace{[J_z, T_q^k] - \hbar q T_q^k}^{=0} |jm\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle j'm' | J_z T_q^k - T_q^k J_z - \hbar q T_q^k | jm\rangle = \langle j'm'| \underbrace{J_z}_{m'\hbar} T_q^k |jm\rangle - \langle j'm'|T_q^k \underbrace{J_z}_{m\hbar}|jm\rangle - \langle j'm'|\underbrace{\hbar q}_{\text{sai fora}} T_q^k|jm\rangle$$

$$\Rightarrow m'\hbar \langle j'm'|T_q^k|jm\rangle - m\hbar \langle j'm'|T_q^k|jm\rangle - \hbar q \langle j'm'|T_q^k|jm\rangle$$

$$\Rightarrow (m'-m-q)\langle j'm'|T_q^k|jm\rangle = 0 \rightarrow m' = m+q \quad \blacksquare$$

Teorema de Wigner-Eckart: Os elementos de matriz de operadores tensoriais na base dos autoestados do Momento Angular satisfazem:

$$\boxed{\langle \alpha', j'm' | T_q^k | \alpha, jm\rangle = \langle jk; mq | jk; j'm'\rangle \frac{\langle \alpha' j' \| T^{(k)} \| \alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}}$$

Coeficiente de Clebsch-Gordon: adição de momentos angulares j e k (depende da Geometria do problema)

constante de Universalidade (independe do Problema)

Onde $\| T^{(k)} \|$ é independente de m, m' e q.

Um exemplo de tensor esférico são os Harmônicos Esféricos $Y_\ell^{(m)}$; Lembre-se que são dados por $Y_\ell^{(m)} = \langle \hat{n} | \ell m\rangle$

Ou seja, dependem da direção do versor $\hat{n}$; Imagine que agíssemos em $\hat{n}$ por meio de uma rotação $\mathcal{D}(R)$ como será que $Y_\ell^{(m)}$ se transformaria nesse caso?

rotação de $|\hat{n}\rangle \rightarrow |\hat{n}'\rangle = \mathcal{D}(R)|\hat{n}\rangle \rightarrow \langle \hat{n}'| = \langle \hat{n}|\mathcal{D}^\dagger(R)$

$$Y_\ell^{(m)}(\hat{n}') = \langle \hat{n}' | \ell m\rangle \overset{!}{=} \langle \hat{n} | \mathcal{D}^\dagger(R) | \ell m\rangle$$

$\hookrightarrow$ expandindo $\mathbb{1} = \sum_{m'} |\ell m'\rangle\langle \ell m'|$

$$\overset{!}{=} \sum_{m'} \underbrace{\langle \hat{n} | \ell m'\rangle}_{Y_\ell^{(m')}} \underbrace{\langle \ell m' | \mathcal{D}^\dagger(R) | \ell m\rangle}_{D^{(\ell)*}_{mm'}}$$

$\hookrightarrow$ Rotações $\mathcal{D}(R)$ não alteram o valor total do momento angular ℓ; uma vez que são funções do mesmo (comutam)

$$\Rightarrow \boxed{Y_\ell^{(m)} = \sum_{m'} Y_\ell^{(m')} D^{(\ell)*}_{mm'}(R)}$$ $\longrightarrow$ mesma regra de transformação que $T_q^{(k)} = Y_{\ell = k}^{(m=q)}$

A notação e toda essa ideia de tensor esférico é de extrema relevância, uma vez que é possível escrever qualquer tensor cartesiano como um tensor esférico. Ou seja; qualquer escalar, vetor, tensor pode ser escrito utilizando tensores esféricos.

daqui que vem o poder do Teorema de Wigner-Eckart. Podemos utilizá-lo para encontrar diversas representações de operadores na base do momento angular.