Noções de Probabilidade:

$\Omega \rightarrow$ espaço amostral

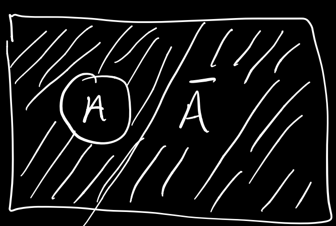
$\Omega = \{cara, coroa\}$ $\quad \Omega = \{\underset{x}{1}, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad \Omega = \{\underset{x}{(1,1)}, (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$

$0 \leq Pr[x] \leq 1$ $\quad \sum_{x \in \Omega} Pr[x] = 1$ $\quad Pr[x] = \frac{1}{\#\Omega}$ se eventos equiprováveis

$x = (A, V)$ $\quad Q = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$ evento composto

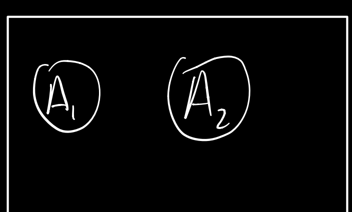
$Pr[Q] = \frac{\#Q}{\#\Omega} = \frac{5}{36}$ $\quad Pr[\Omega] = 1$

$q(x) = A(x) + V(x) = 6$ $\quad P[q(x)] = P[Q]$



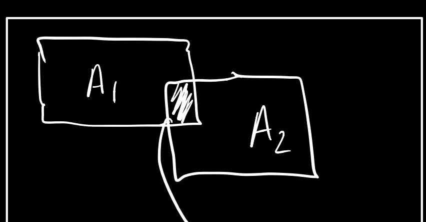
$\bar{A} \rightarrow$ A complementar

$A \cup \bar{A} = A + \bar{A} = \Omega$

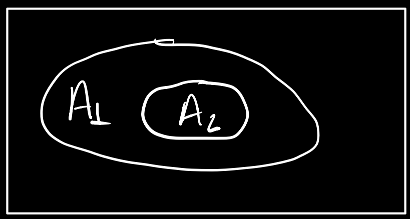


A_1 e A_2 são conjuntos disjuntos

$A_1 \cap A_2 = 0$

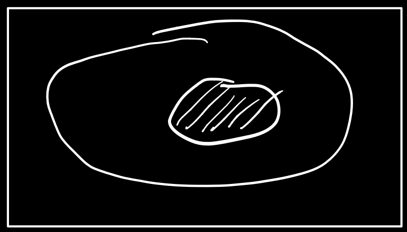


$\rightarrow$ intersecção de A_1 e A_2 $\rightarrow A_1 \cap A_2$ ou $A_1 \cdot A_2$



A_2 esta contido em A_1

$$A_2 \subset A_1$$



$$A_1 - A_2$$

$A_1, A_2, \ldots$ mutuamente disjunto se $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

Axiomas

1. $P[A] \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$

2. $P[\Omega] = 1$

3. se $A_1, A_2, \ldots$ mutuamente disjuntos $\rightsquigarrow$ $P[\bigcup_i A_i] = \sum_i P[A_i]$

Ex: $(I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n)$ sequência de n inteiros $1 \leq I_j \leq N$

$(1,2,3)$ diferente $(2,3,1)$ em conjunto $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ poss. } I_1 \\ N \text{ poss. } I_2 \\ N \text{ possi } I_n \end{array}\right\} N^n$$

Ex 2: $(I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n)$ sem repetição qnts sequências?

N para I_1

$N-1$ para I_2

$N-2$ para I_3

$\vdots$

$N-(n-1)$ para I_n

$$\left.\right\} \; N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

se $n = N \to N!$

Ex 3: $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ $\{1,2,4\} = \{2,1,4\} = \{1,4,2\} = \ldots$

permutação de n elementos.

$$\hookrightarrow \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Combinação de $N, n = C_{N,n}$

N elementos n a n

Teorema binomial (Newton)

$$\boxed{(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}}$$

qnts maneiras?

Ex4: N bolas numeradas em 3 conjuntos, 1 contenha n_1 bolas
2 contenha n_2 bolas
3 contenha o restante $n_3 = N - n_1 - n_2$

1: $\binom{N}{n_1}$ formas p/ 1° conjunto

2: $\binom{N-n_1}{n_2}$ formas p/ 2° conjunto

3: escolhido $\to \binom{N-n_1-n_2 \equiv n_3}{n_3} = 1$

$$\binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2} = \frac{N!}{\cancel{(N-n_1)!}\,n_1!} \cdot \frac{\cancel{(N-n_1)!}}{(\underbrace{N-n_1-n_2}_{n_3})!\,n_2!}$$

$$= N! / n_1!\,n_2!\,n_3!$$

ex 5: prob. de n caras entre N moedas onestas.

$X = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ $c_j \in \{0, 1\}$ ($1 \to$ cara, $0 \to$ coroa) $\qquad 2^n$ valores possíveis de x

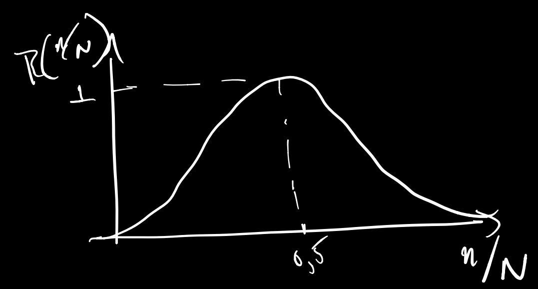
$$P[x] = \frac{1}{2^N}$$

$$\#n = \binom{N}{n}$$

$$P[n] = \frac{\binom{N}{n}}{2^N} = \frac{1}{2^N}\binom{N}{n};$$ máxima quando $n = \frac{N}{2}$

$$\sum_{n=0}^{N} P[n] = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} 1^n 1^{N-n} = 1$$

$$R(r) = \frac{P[r.N \text{ caras}]}{P[\frac{1}{2}N \text{ caras}]} \longrightarrow$$



Lei dos Grandes Números $\to$ tendência de convergência a média

ex 6: se a probabilidade de cara é p, qual é $p[n]$?

$$\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = p(n)$$ distribuição binomial

Limite $n \ll N$; $p \ll 1$:

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1) \approx N^n$$

$$(1-p)^{N-n} \approx (1-p)^N = [\underbrace{(1-p)^{1/p}}_{\simeq e^{-p}}]^{p.N} \simeq e^{-pN}$$

$$p(n) = \frac{N^n}{n!} p^n e^{-pN} \quad ; \quad \bar{n} = pN \Rightarrow \underbrace{p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}}_{\text{Distribuição de Poisson}}$$

<u>Valor médio</u>: $$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^j}{j!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \cdot e^{\bar{n}} \Rightarrow \langle n \rangle = \bar{n}$$

(isso na distribuição de Poisson)

<u>Probabilidade como Frequência:</u>

Sequência amostral qualquer $x_1, x_2, \ldots,$ de comprimento N em que $x_n \in$ espaço amostral Ω, é definido:

$$\boxed{P[x] = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{número de vezes em que } x_n = x \text{ p/ } n = 1, \ldots, N}{N}}$$

↳ probabilidade de um evento x

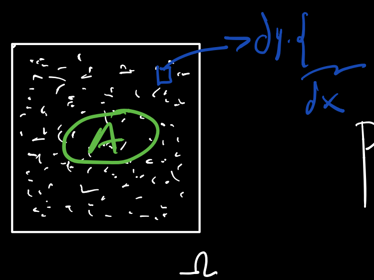
↳ não necessita eventos equiprováveis.

↳ dá problema quando o espaço amostral é infinito

Espaço amostral c/ infinitos elementos é preciso trabalhar com densidades. É fisicamente impossível trabalhar c/ a probabilidade de <u>uma</u> amostra dentro de um conjunto infinito (mts vezes devido a incerteza de medidas) por isso trabalhamos c/ densidade p/ poder trabalhar com intervalos de amostras, etc.

<u>ex1</u>: Medindo a altura de 7 bilhões de pessoas, a prob de se obter 1,70 m é <u>zero</u>. No entanto a prob de obter algo no intervalo de 1,70m a 1,71m <u>é finita e não nula</u>.

Se $\# \Omega = +\infty$ $\{(x,y) \in \Omega\}$



$$P[A] = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\text{ de pontos em } A}{N}$$

$\lim_{N \to \infty}$ (implícito)!

A -> eventos compostos

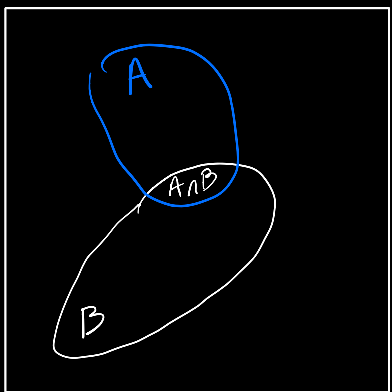
definir

$$P(x,y)\,dx\,dy = \frac{\#\text{ de pontos em } dxdy}{N}$$

↳ <u>distribuição de probabilidade</u>

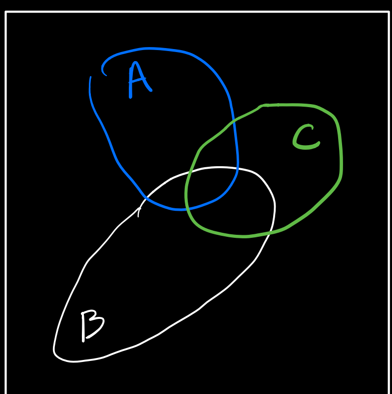
<u>Ensemble estatístico</u>

$$P[A] = \int_{(x,y)\in A} P(x,y)\,dx\,dy$$



$\rightarrow$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- $p[A - B] = p[A] - p[A \cap B]$



$\rightarrow$

- $p[A \cup B \cup C] = p[A] + p[B] + p[C] - p[A \cap B] - p[A \cap C] - p[B \cap C] + p[A \cap B \cap C]$

<u>Operadores Lógicos:</u> "e" ; "ou" ; "não"

$a(x)$, $b(x)$ afirmações que definem eventos <u>A</u> e <u>B</u>: então:

$$p[a \text{ e } b] = p[A \cdot B] = p[A \cap B]$$

$$p[a \text{ ou } b] = p[A + B] = p[A \cup B] = p[A] + p[B] - p[A \cap B]$$

$p[\text{não } a] = p[\bar{A}] = 1 - p[A]$

→ dado que $a(x)$ é verdadeira, qual a probabilidade de que $b(x)$ seja verdadeira?

↓ probabilidade de b dado a $\equiv$ $\underline{P[b|a]}$

$$P[b|a] = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\text{ pontos em } A \text{ e } B}{\#\text{ pontos em } A} \therefore$$

$$p[b|a] = \frac{p[b \text{ e } a]}{p[a]} = \frac{p[B\cap A]}{p[A]} = \underline{p[B|A]}$$

Dado conjunto B; e uma coleção $A_1, A_2, \ldots$ $\underline{\text{disjuntos}}$ com $\underline{\bigcup_i A_i = \Omega}$

então:
$$p[B] = \sum_j P[B\cap A_j] = \sum_j P[B|A_j]\, p[A_j]$$

$\boxed{\text{Teorema de Bayes}}$:

$$\boxed{p[A|B] = \frac{p[B|A]\cdot p[A]}{p[B]} = \frac{p[B|A]\,p[A]}{p[B|A]\,p[A] + p[B|\bar{A}]\,p[\bar{A}]}}$$

→ $\underline{b}$ é estatisticamente independente/não correlacionado com $\underline{a}$ se:

$$p[b|a] = p[b]$$

⇕ equivalente

$$p[B \cap A] = p[A] \cdot p[B]$$

$\underline{\text{Ex}}$: Dado de 6 faces, resultado par; qual a chance de ser 4?

$A \to 4$

$B \to \text{par}$

$$\Rightarrow p[4|\text{par}] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{p[\text{par}|4] \cdot p[4]}{p[\text{par}]}$$

prob de sair 4 rodado (1/6)

prob de ser par sendo que saiu 4 (1)

prob de sair 4 sendo que saiu um número par

prob de sair número par (1/2)

$$\Rightarrow p[4|\text{par}] = \frac{1 \cdot 1/6}{1/2} = \underline{1/3}$$

Variáveis Aleatórias:

Uma variável x associada a uma distribuição de probabilidade P_x é chamada de variável aleatória. Sendo essa distribuição discreta ou contínua.

Caso x assuma apenas valores em um intervalo finito $a \leq x \leq b$ temos

$$\int_a^b P(x)\,dx = 1 \quad (\text{condição de normalização})$$

No entanto é prático definir $P(x) = \begin{cases} P(x), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$ e então:

$$\int_a^b P(x)\,dx = 1 \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1}$$

<u>Delta di Dirac</u>: $\delta(x)$ de tal modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1$$

E além disso: sendo $f(x)$ função:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{a \to 0^+} \begin{cases} 0, & \text{otherwise} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Em sua forma de integral temos:

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk}$$

$$\|$$

$$\lim_{\gamma \to 0} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\gamma|k|}\,dk}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{\gamma^2+x^2} = f_\gamma(x)}$$

Distribuição de Cauchy

Com isso, dada uma distribuição de probabilidade em que a variável x assume apenas valores discretos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots p_n$ cuja soma é $\underline{1}$, pode ser escrita como:

$$P(x) = \sum_i^n p_i\,\delta(x - x_i)$$

→ tds expressões p/ distribuições contínuas permanecem válidas p/ distribuições discretas escritas pela delta de Dirac. Convertendo integrais em somas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i\, \delta(x - x_i)\,dx = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\,dx}_{1} = \sum_{i=1}^{n} P_i = \underline{1}$$

Dado uma função de distribuição $P(x)$; temos que o <u>Valor Médio</u> ou <u>Valor Esperado</u> de uma função $f(x)$ de uma variável aleatória será:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, P(x)\, dx$$

onde vale as propriedades:

$$\langle f(x) + g(x) \rangle = \langle f(x) \rangle + \langle g(x) \rangle$$

$$\langle c\, f(x) \rangle = c \langle f(x) \rangle \quad , \text{se } c \to \text{constante}$$

Por conveniência definimos:

$$\boxed{\overline{x} \equiv \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P(x)\, dx}$$

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \to \int$ por conveniência

Temos ainda que: $\begin{cases} \Delta x \to \text{Desvio Padrão} \rightsquigarrow \text{Incerteza} \\ (\Delta x)^2 \to \text{Variância} = \text{Var}(x) \end{cases}$

$$(\Delta x)^2 = \langle (x-\bar{x})^2 \rangle = \int (x-\bar{x})^2 P(x)\,dx$$

$$= \langle x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x\bar{x} \rangle + \langle \bar{x}^2 \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle - 2\underbrace{\bar{x}\langle x \rangle}_{\bar{x}^2} + \bar{x}^2$$

$$\langle x^2 \rangle - \bar{x}^2$$

$$\to \boxed{(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Desigualdade de Chebyshev:

$$\boxed{P[|x-\bar{x}| > a\Delta x] \leq \frac{1}{a^2}; \quad a > 0}$$

↳ Dada uma pequena incerteza Δx em um valor médio $\bar{x}$; grandes desvios com relação a $\bar{x}$ tenham uma probabilidade muito pequena de ocorrer.

↳ prob de se obter x que diste a desvio padrões da média $\bar{x}$ decai quadraticamente com a. → independe da distribuição.

Distribuição Delta de Dirac:

$$P(x) = \delta(x - x_0)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\delta(x-x_0)\,dx = \underline{x_0} \quad ; \text{ além disso:}$$

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 \delta(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 \delta(x-x_0)\,dx = \underline{0}$$

Distribuição Binomial:

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Seu valor médio será:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} n P(n) = \sum_{n=0}^{N} n\, p^n (1-p)^{N-n} \binom{N}{n}$$

para q qualquer

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \left[\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \right] = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = \underline{N p (p+q)^{N-1}}$$

No caso particular em que $q = 1-p \rightarrow \underline{\langle n \rangle = Np}$

Cuja variância é: $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 P(n) = \sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{p} p^n (1-p)^{N-n}$$

p/ q qualquer: $= p\frac{\partial}{\partial p}\left\{p\frac{\partial}{\partial p}\left[\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n q^{N-n}\right]\right\} = p\frac{\partial}{\partial p}\left[Np(p+q)^{N-1}\right]$

$$= Np(p+q)^{N-1} + N(N-1)p^2(p+q)^{N-2}$$

se $q = 1-p$ então

$$\langle n^2\rangle = N^2p^2 + Np(1-p)$$

$$\rightarrow \quad \Delta n = \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2} = \sqrt{Np(1-p)}$$

Notemos que a razão $\frac{\Delta n}{\langle n\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1-p}{p}}$ vai a zero

quando $\underline{N \to \infty}$.

Distribuição de Poisson:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

onde $\bar{n}$ é o valor médio.

$$\bar{n} = pN$$

$$(\Delta n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-\bar{n})^2 P(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2 P(n)\right) - \bar{n}^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\bar{n}^n}{n!}e^{-\bar{n}}\right) - \bar{n}^2$$

$$= e^{-\bar{n}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\bar{n}^n}{n!}\right) - \bar{n}^2 \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{\bar{n}^n}{n!} = \bar{n}(\bar{n}+1)e^{\bar{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta n = \sqrt{e^{-\bar{n}}\,\bar{n}(\bar{n}+1)\,e^{\bar{n}} - \bar{n}^2} \longrightarrow \quad \boxed{\Delta n = \sqrt{\bar{n}}}$$

$\uparrow$ pode ser obtido por meio da distribuição normal; fazendo $Np = \bar{n}$ fixo. $N \to \infty$, $p \to 0$

Distribuição Uniforme:

Sendo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ definimos:

$$P(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \begin{cases} 0 & , \text{otherwise} \\ 1 & , a \leq x \leq b \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ normalizada; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1.$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,P(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\; x = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 P(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\bar{x})^2\,dx = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Distribuição Exponencial

$$P(x) = a e^{-ax} \quad ; \quad (x \geq 0) \quad , \quad a > 0$$

↳ normalizada.

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x P(x)\, dx = a \int_0^{\infty} x e^{-ax}\, dx = \boxed{1/a}$$

$$(\Delta x)^2 = \left(\int_0^{\infty} x^2 P(x)\, dx \right) - \bar{x}^2 = \boxed{1/a^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 1/a}$$

Distribuição Gaussiana / Normal:

Depende de dois parâmetros $\mu, \sigma > 0$:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

↳ Normalizada já.

↳ Simétrica em relação a μ $\rightarrow$ $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x)\, dx = \mu$

$$\rightarrow \quad \boxed{\bar{x} = \mu = \text{valor médio}}$$

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x-\bar{x})^2 P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x-\bar{x})^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 e^{-u^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{2\sigma^2}{2} \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sigma^2$$

$$(\Delta x)^2 = \sigma^2 \longrightarrow \boxed{\Delta x = \sigma - \text{Desvio Padrão}}$$

Lei dos Grandes Números:

Variáveis estatisticamente independentes → valor de uma não afeta a probabilidade da outra

Ou seja a prob conjunta $P(x,y)\,dx\,dy$ de se obter X entre $(x, x+dx)$ e Y entre $(y, y+dy)$

é:

$$\boxed{P(x,y) = P_x(x) \cdot P_y(y)}$$

O produto das densidades associadas a x e a y.

⇒ Se $f(x)$ e $g(y)$ são funções estatisticamente independentes:

$$\boxed{\langle f(x) \cdot g(y) \rangle = \langle f(x) \rangle \cdot \langle g(y) \rangle}$$

De fato:

$$\langle f\cdot g\rangle = \int dx \int dy\, f(x)\cdot g(y)\cdot P(x,y) = \int dx \int dy\, f(x)\cdot g(y)\cdot P_x(x)\cdot P_y(y)$$

$$= \left[\int dx\, f(x)\, P_x(x)\right]\cdot\left[\int dy\, g(y)\, P_y(y)\right]$$

$$= \langle f(x)\rangle\cdot\langle g(y)\rangle .$$

Seja $x_1, x_2, \dots, x_N$, N variáveis aleatórias estatisticamente independentes

Seja $$X \equiv \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

A lei dos Grandes números quantifica a incerteza de X;

$x_i \longrightarrow$ associa-se $P_i(x_i)$, valor médio $\overline{x}_i$; incerteza Δx_i

Com isso, podemos definir a incerteza quadrática média como:

$$a^2 = \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2}{N}$$

O valor médio e a incerteza de X são dadas por:

$$\overline{X} = \left\langle \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \right\rangle = \frac{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_N}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{x_i}$$

$$(\Delta x)^2 = \left\langle (x-\bar{x})^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{(x_1-\bar{x}_1)+\dots+(x_N-\bar{x}_N)}{N} \right)^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} (x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \left\langle (x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) \right\rangle$$

Seperando os termos em que $i \neq j$ e $i=j$ temos:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\left\langle (x_i-\bar{x}_i)^2 \right\rangle}_{(\Delta x_i)^2} + \frac{1}{N} \sum_{i\neq j} \underbrace{\left\langle (x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) \right\rangle}_{\underbrace{\langle (x_i-\bar{x}_i)\rangle}_{=0\ \forall i} \cdot \langle (x_j-\bar{x}_j)\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2 = \frac{a^2}{N} \longrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{a}{\sqrt{N}}}$$

$\rightsquigarrow$ A incerteza da média é muito menor que a incerteza das medidas individuais.

Também nos leva a concluir que a variância da soma de variáveis aleatórias independentes é a soma das variâncias individuais:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_i x_i\right) = \sum_i \mathrm{Var}(x_i)$$

Teorema do Limite Central:

Dado variável aleatória $X \equiv \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$

Com X_i variável aleatória (VA) que possuem uma distribuição $P(x_i)$ <u>arbitrária</u>

Com média μ e variância s^2 <u>finitas</u>. Então a distribuição $P_x(x)$ associada a $\underline{X}$ quando $N \to \infty$; $P_x(x) \to$ <u>distribuição gaussiana</u> de média $\underline{\mu}$ e

variância $\sigma^2 = \dfrac{s^2}{N}$

→ <u>exemplo</u>

Distribuição de uma função de variáveis aleatórias:

X VA associada a uma distribuição $P_X(x)$. Y é função de x

Como obter a distribuição $P_Y(y)$ associada a y?

X discreto: $P_Y(y) = P[Y=y] = \sum_{x \mid Y(x)=y} P_X(x)$

X Contínuo: Pensando no caso em que $Y(x)$ seja menor que um valor y:

$$P[Y(x) < y] = \int \theta(y - Y(x)) P_x(x) dx$$

Onde $\theta(u)$ é a função theta de Heaviside:

$$\theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u < 0 \\ 1 & \text{se } u > 0 \end{cases}$$

Em termos da Delta de Dirac:

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{u} \delta(v) dv$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{du}\theta(u) = \delta(u)$$

Da densidade de prob temos $P_y(y)\,dy = P[Y(x) < y + dy] - P[Y(x) < y]$

$$\Rightarrow \quad P_y(y) = \frac{d\,P[Y(x) < y]}{dy}$$

Em geral teremos:

$$\boxed{P_y(y) = \int \delta(y - Y(x))\, P_x(x)\, dx}$$

Um caso especial é aquele no qual $Y(x)$ é estritamente crescente $\rightarrow$ $x = Y^{-1}(y)$

$$\int \delta(y - Y(x))\,dx = \int \delta(y - Y(x))\frac{dx}{dy}\,dy = \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x = Y^{-1}(y)}$$

$$P_y(y) = \int \delta(y - Y(x))\, P_x \frac{dx}{dy}\, dy = \left.\left(P_x(x)\frac{dx}{dy}\right)\right|_{x = Y^{-1}(y)} \longrightarrow$$

Se $Y(x)$ estritamente crescente: $\underline{P_y(y)\,dy = P_x(x)\,dx}$

Se $Y(x)$ é estritamente decrescente: $|P_y(y)\,dy| = |P_x(x)\,dx|$

Se $Y(x)$ monotônica: $P_y(y) = P_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = P_x(x)\left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1}$

Em geral:

$$\boxed{P_y(y) = \sum_{x \mid Y(x)=y} P_x(x) \left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1}}$$

Generalizando p/ função de vários variáveis aleatórias:

$$y = Y(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$P_y(y) = \int d^n x \, \delta\left(y - Y(x_1, x_2, \dots, x_N)\right) P_{\{x_i\}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

<u>Exemplo</u>: $P_x(x) = a e^{-ax}$ $\quad x \geq 0$, qual a distribuição associada a <u>$y = x^3$</u>?

$$P_y(y) = P_x(x) \cdot \left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1}_{y = Y(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \xrightarrow{|\,|^{-1}} \left.\frac{1}{3x^2}\right|_{\substack{y = Y(x) \\ x = y^{1/3}}} \rightarrow \frac{1}{3y^{2/3}}$$

$$\rightarrow \boxed{P_y(y) = \frac{a e^{-a y^{1/3}}}{3 y^{2/3}}}$$

Exemplo: $P_Z(z) = \frac{1}{h} e^{-z/h}$; $h = \frac{k_B T}{mg}$ $z \geq 0$; $X = |Z_1 - Z_2|$

$P_X(x) = ?$

$$P_X(x) = \int dz_1 \int dz_2 \, \delta(x - |z_1 - z_2|) \cdot P_Z(z_1) \cdot P_Z(z_2)$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \, \delta(x - |z_1 - z_2|) \, e^{-(z_1+z_2)/h}$$

→ o integrando é simétrico pela troca z_1, z_2 | nos restringimos então a segunda integral no intervalo $z_1 > z_2$ e multiplicar o resultado por 2:

$$\frac{2}{h^2} \int_0^\infty dz_2 \int_{z_2}^\infty dz_1 \, \delta(x - (z_1 - z_2)) \, e^{-(z_1 - z_2)/h}$$

Seja $u = z_1 - z_2$ e $z_1 + z_2 = u + 2z_2$

$$\Rightarrow P_X(x) = \frac{2}{h^2} \int_0^\infty dz_2 \int_0^\infty du \, \delta(x-u) \, e^{-(u+2z_2)/h}$$

$$= \frac{2}{h^2} e^{-x/h} \int_0^\infty dz_2 \, e^{-2z_2/h} = \frac{2}{h^2} e^{-x/h} \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_X(x) = \frac{1}{h} e^{-x/h}}$$

exemplo: Caminhada aleatória: $X = \sum_{i=1}^{n} s_i$ $\quad s_i = \{-\ell, +\ell\}$

$$P_S(s) = p\,\delta(s-\ell) + (1-p)\,\delta(s+\ell)$$

$$P_X(x) = \int ds_1 \int ds_2 \ldots \int ds_N\, \delta\left(x - \sum s_i\right) P_S(s_1)\, P_2(s_2) \ldots P_S(s_N)$$

$$\delta\left(x - \sum_i^N s_i\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-\sum s_i)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \prod_{i=1}^{N} e^{-iks_i}$$

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \prod_{i=1}^{N}\Big[\underbrace{\int ds_i\, e^{-iks_i} P_S(s_i)}_{Q(k)}\Big] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\,[Q(k)]^N$$

$$Q(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-iks}\,[p\,\delta(s-\ell) + (1-p)\,\delta(s+\ell)] = p e^{-ik\ell} + (1-p)\, e^{ik\ell}$$

$$[Q(k)]^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}[pe^{-ik\ell}]^n\,[(1-p)e^{ik\ell}]^{N-n} = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} e^{-ik\ell(2n-N)}$$

$$\Rightarrow P_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} e^{-ik\ell(2n-N)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik[x-(2n-N)\ell]}$$

$$P_X(x) = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}\,\delta\big(x-(2n-N)\ell\big)$$