Grupos e Tensores:

Operações em Conjuntos: "produto em conjuntos"

$$\boxed{f : C \times C \longrightarrow C}$$

$$C \times C = \{(a,b)\,;\, a,b \in C\}$$

$$f(a,b) \in C \,,\; a,b \in C$$

$$f : C \times C \longrightarrow C$$

$$\underbrace{f(a, f(b,c)) = f(f(a,b), c)}\quad \forall a,b,c \in C$$

↳ Associatividade

$$\underbrace{f(a,b) = f(b,a)}\quad \forall a,b \in C$$

↳ Comutatividade

$$\boxed{f(a,b) \equiv a \cdot b}$$

1-) Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2-) Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$

Algumas Definições iniciais:

1-) Semigrupo
2-) Monoide
3-) Grupo
4-) Subgrupo

1-) Semigrupo: $(S, \circ)$

$$(a \cdot b) c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in S$$

↳ Um conjunto dotado por um produto associativo.

2-) Monoide: $(M, \circ)$

↳ Semigrupo (produto associativo)

Existe $\underline{e \in M}$; $a \circ e = e \cdot a = a \quad \forall a \in M$

$\underbrace{e \rightarrow \text{elemento neutro}}$

$e' \cdot a = a \cdot e' = a \quad \forall a \in M$, se houver dois elementos neutros; $e \cdot e' = e' \Rightarrow \underline{e' = e}$

logo, o elemento neutro é único no monoide.

Grupo: $(G, \cdot)$

1-) Associatividade

2-) $\exists\, e \in G$, elemento neutro

3-) Para cada $g \in G$, $\exists\, g^{-1}$: $g \cdot (g^{-1}) = (g^{-1}) \cdot g = \underset{\text{elemento neutro}}{e}$

"elemento inverso"

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

$$g \cdot h = h \cdot g = e \rightarrow h = h \cdot e = (g^{-1} g)\, h = g^{-1}(g \cdot h) = g^{-1} e = g^{-1}$$

$\Rightarrow \underbrace{h = g^{-1}}$. Logo, o elemento inverso é único.

Propriedades:

i-) $e^{-1} = e$, $e \cdot e = e$

ii-) $(g^{-1})^{-1} = g$

iii-) $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$

Grupo Abeliano (Comutativo):

→ Grupo

→ Propriedade adicional de comutatividade

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$$

nos diz que o grupo em questão é abeliano.

$\boxed{a \cdot b \equiv a + b}$ → p/ operações comutativas

Sub Grupo:

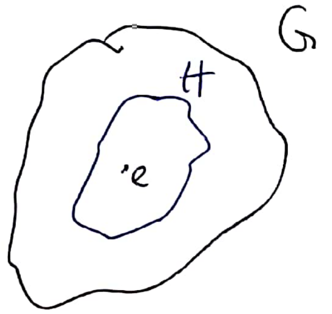
$(G, \circ) \equiv$ Grupo

$H \subset G$, H é um subgrupo de G,

1-) $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall\, h_1, h_2 \in H$

2-) $e \in H$

3-) Se $h \in H$, $h^{-1} \in H$, $\forall h \in H$



↳ Todo grupo é um semigrupo

↳ recíproca não é válida.

EX| $S = \{1, 2, 3, ..\} = \mathbb{N}$ $+ \equiv$ operação em S

$a, b \in S$, $a+b \in S$

$(S, +) \rightarrow$ Semigrupo Abeliano

$\nexists\, e$; $a+e = e+a = a$; logo não é monoide e não é grupo.

Ex: $\{0, 1, 2, 3, \dots\} \equiv \mathbb{N}_0$

$0 \to$ é a unidade.

$(\mathbb{N}_0, +) \to$ Monóide Abeliano

Ex: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$(\mathbb{Z}, +)$ é um Grupo

$a^{-1} = -a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

Provar que $\mathbb{Z}_n$ é grupo $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Ex: $\mathbb{R}_+ = \{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}_+, +) \to$ Semigrupo Abeliano

$(\mathbb{R}_+, \cdot) \to$ Grupo

Ex: $(\mathbb{C}, +) \equiv$ Grupo

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \equiv$ Grupo

$(\mathbb{Q}, +) \equiv$ Grupo

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \equiv$ Grupo

- $\mathrm{MAT}(\mathbb{R}, n) = \{$matrizes reais $n \times n\}$

$(\mathbb{C}, n)$

$(\mathbb{Q}, n)$

$(\mathbb{Z}, n)$

$\vdots$

EX $(Mat(\mathbb{C}, n), +) \to$ Grupo

$$A + B \in Mat(\mathbb{C}, n)$$

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad A \to -A$$

EX $(Mat(\mathbb{C}, n), \cdot) \to$ Monoide

produto usual de matriz

↳ nem todas as matrizes possuem inversa.

$$A(BC) = (AB)C$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad A\mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$$

em geral $AB \neq BA$

$$\underline{GL(\mathbb{C}, n) = \{A \in Mat(\mathbb{C}, n) ; \det A \neq 0\}}$$

$$GL(\mathbb{C}, n) \subset Mat(\mathbb{C}, n)$$

$(GL(\mathbb{C}, n), \cdot) \to$ é um <u>grupo</u>

$$A, B \in GL(\mathbb{C}, n)$$

$$AB \in GL(\mathbb{C}, n) ; \; \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$$

$$\mathbb{1} \in GL(\mathbb{C}, n)$$

$A \in GL(\mathbb{C},n)$, $A^{-1} \in GL(\mathbb{C},n)$ pois $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$

$(GL(\mathbb{R},n), \cdot) \to$ é um grupo.

$GL \to$ Grupo Linear

$SL(\mathbb{C},n) = \{A \in MAT(\mathbb{C},n), \det A = 1\}$

$SL(\mathbb{C},n) \subset GL(\mathbb{C},n)$

$(SL(\underset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}},n), \cdot)$ é um <u>grupo</u>

$GL(\mathbb{Z},n) = \{A \in MAT(\mathbb{Z},n), \det A \neq 0\}$

$$\underset{\underset{GL(\mathbb{Z},n)}{\cap}}{\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} \longrightarrow \underset{\underset{GL(\mathbb{Z},n)}{\not\cap}}{\underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}}$$

$\longrightarrow (GL(\mathbb{Z},n), \cdot)$ <u>não</u> é um grupo.

$SL(\mathbb{Z},n) = \{A \in MAT(\mathbb{Z},n), \det A = 1\}$

$(SL(\mathbb{Z},n), \cdot) \to$ é um <u>grupo</u>

$A^{-1} = \cancel{\frac{1}{\det A}}^{\,1} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ → matriz dos cofatores gera uma matriz com coeficientes $\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A^{-1} \in SL(\mathbb{Z},n)$

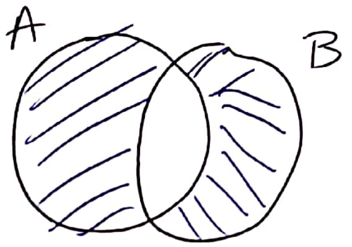
EX1: $X \equiv$ conjunto não-vazio

$A, B, C \subset X \quad ; \quad \mathbb{P}(X) = \{A \subset X\}$

$A, B \subset X$

$$\boxed{A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

↳ Diferença Simétrica



$A \triangle B \subset X$

$A, B \longmapsto A \triangle B \in \mathbb{P}(X)$

1-) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

1-') $A \triangle B = B \triangle A$

2-) $e = \emptyset$ (vazio)

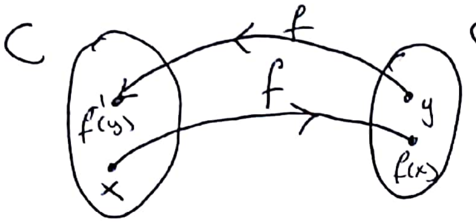
$A \triangle \emptyset = A$

3-) $A^{-1} = A$; $A \triangle A = \emptyset$

$(\mathbb{P}(X), \triangle)$ é um grupo

EX | Grupos de Permutações

$C \equiv$ conjunto não vazio



$x \in C \to f(x) \in C$

$y \in C \to x = f^{-1}(y)$

$f(x) = y$

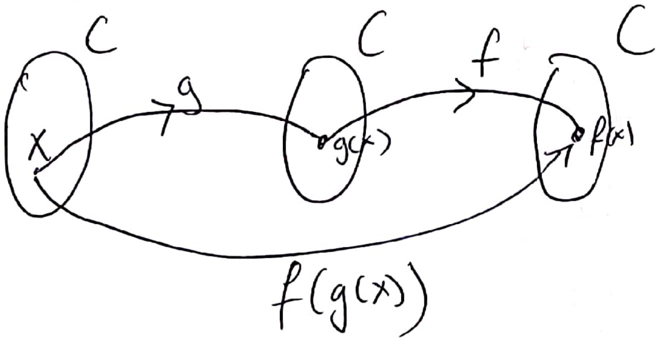
$\{f : C \to C,\ f \text{ é bijetora}\} = Perm(C)$

↳ inversível

→ Grupo de Permutações de elementos de C.

$f, g : C \longrightarrow C$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in C$



Composição é bijetora

$f \circ g : C \to C$

$g^{-1} \circ f^{-1}$

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (prove!)

$f \circ g \neq g \circ f$

$id: C \to C$

$id(x) = x$

$f \circ id = id \circ f = f$

$f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$

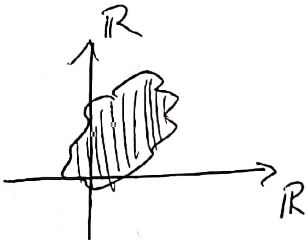
Teorema: Todo Grupo é subgrupo de um grupo de permutações.

Relações de Equivalência:

A, conjunto não vazio.

$E \subset A \times A = \{(a,b) ; a, b \in A\}$

↳ Relação em A



Relações de Equivalência (num conjunto A): cap 1

1-) $(a,a) \in E \quad \forall a \in A$ (identidade)

2-) Se $(a,b) \in E$, então $(b,a) \in E$ (Simetria)

3-) Se $(a,b), (b,c) \in E$, então $(a,c) \in E$ (transitividade)

Ex1: $A = \mathbb{R}$

$E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x - y \in \mathbb{Q}\}$ → Relação de Equivalência

1-) $(x,x) \in E$? ✓ 2-) $(x,y) \in E$; $(y,x) \in E$? ✓

$x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ $x - y = r \in \mathbb{Q}$ ↳ $y - x = -r \in \mathbb{Q}$

3-) $(x,y) \in E$, $(y,z) \in E$ se $(x,z) \in E$?

$x - z \in \mathbb{Q}? = \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\uparrow}{(x-y)}} + \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\uparrow}{(y-z)}} \Rightarrow \underline{x - z \in \mathbb{Q}}$

V

↳ espaço vetorial ; W

↳ sub espaço vetorial

$E = \{(x,y);\ x,y \in V;\ y - x \in W\}$

1-) $(x,x) \in E$

$x - x \in W$

2-) $(x,y) \in E$, $y - x \in W$; $x - y \in W \Rightarrow (y,x) \in E$

3-) $(x,y) \in E$, $(y,z) \in E$

$(x,z) \in E$? ✓

$z - x = \underset{W}{\underset{\uparrow}{(z-y)}} + \underset{W}{\underset{\uparrow}{(y-x)}} \Rightarrow \underline{z - x \in W}$ /

<u>Notação</u>: A, E relação de equivalência em A.

$(a,b) \in E \rightarrow a \sim b$

1-) $a \sim a, \forall a \in A$

2-) Se $a \sim b$, $b \sim a$

3-) Se $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

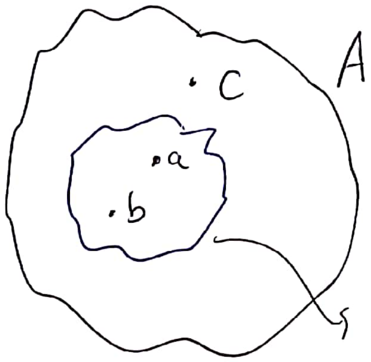
Classes de Equivalência:

A, E = Relação de Equivalência

$a \in A$

$$\boxed{[a] = \{b \in A,\ b \sim a\}}$$

$a \in [a]$



Subconjunto de A, contendo todos os elementos que são equivalentes a <u>a</u>.

$[a] \subset A$

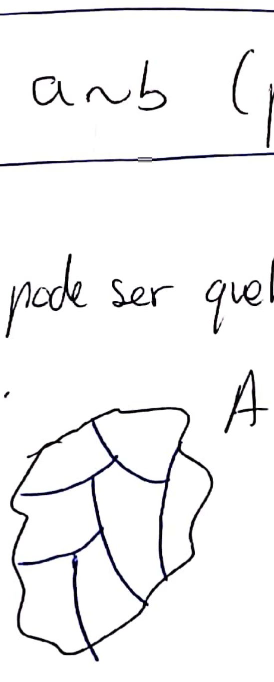
$b \sim a,\ b \in [a]$

$c \not\sim a$

$c \not\sim b$

$$\boxed{[a] = [b] \iff a \sim b \ \text{(por transitividade)}}$$

↳ Todo conjunto A pode ser quebrado em diversas classes de equivalência disjuntas.



as diferentes classes de equivalência n̂ podem possuir elementos em comum

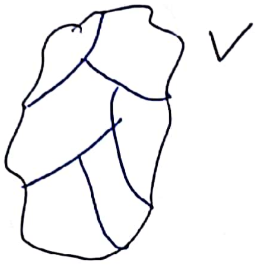
$[a] \cap [b] \neq \emptyset$

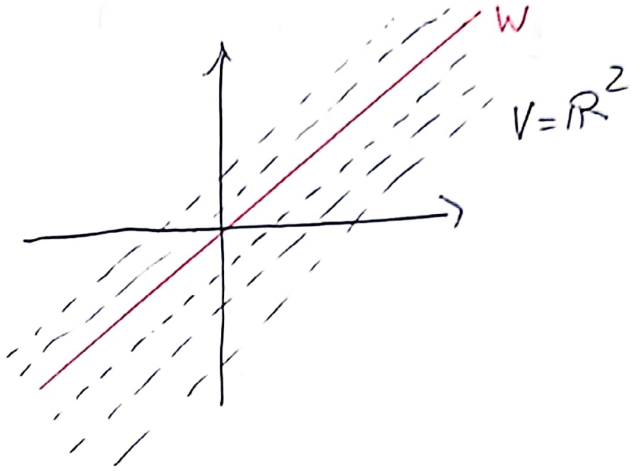
$c \sim a,\ c \sim b \Rightarrow a \sim b$

$\Rightarrow [a] = [b]$

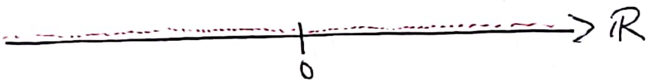
- V, W

$x \sim y$ se $y - x \in W$





- $\mathbb{R}$, $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Q}$



$[0] = \mathbb{Q}$, $[\pi] = \{\pi + r, r \in \mathbb{Q}\}$

$A/\sim$ $\equiv$ coleção de todas as classes de equivalência de A por $\sim$.

- EX| Grupo $\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ $\quad \underset{\text{fixado}}{n} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$m_1 \sim m_2$ se $\underline{m_2 - m_1 = k.n}$, $k \in \mathbb{Z}$

- 1-) $m_1 \sim m_1$; $m_1 - m_1 = 0 = \overset{\mathbb{Z}}{\overset{\cup}{0}}.n$

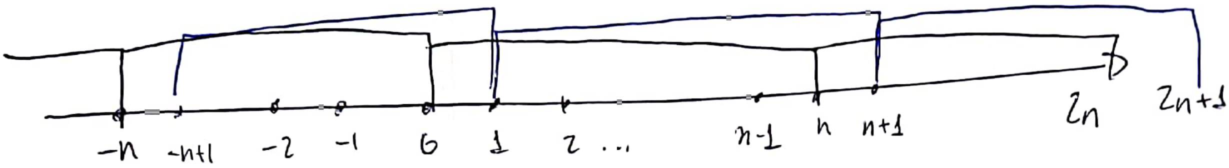
2-) $m_1 \sim m_2$, $m_1 - m_2 = k_n$; $m_2 - m_1 = \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{Z}}}{-k}.n \Rightarrow m_1 \sim m_2$

$m_2 \sim m_1$

3-) $m_1 \sim m_2$; $m_2 \sim m_3$

$$m_3 - m_1 = (m_3 - m_2) + (m_2 - m_1) = k_1 n + k_2 n = (\underbrace{k_1 + k_2}_{\in \mathbb{Z}}) n$$

$\Rightarrow m_1 \sim m_3$



$[0] = \{k.n, k \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{1 + kn, k \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$[n-1]$

$[n] = [0]$

$\{[0], [1], \ldots, [n-1]\} = \mathbb{Z}/\sim$

$\downarrow$

define uma operação no conjunto

$[a] + [b] \equiv [a+b]$

$[a]^{-1} = [n-a]$

Secção 1.1.1.3 - Relação de Equivalência:

Seja A um conjunto não vazio. $E \subset A \times A$

- Requisitos de uma relação de equivalência:

1-) $(a,a) \in E$, $\forall a \in A$

2-) $(a,b) \in E$, $(b,a) \in E$

3-) $(a,b) \in E \Rightarrow (a,c) \in E$
$(b,c) \in E$

1-) $a \sim_E a$, $\forall a \in A$

2-) $a \sim_E b \Rightarrow b \sim_E a$

3-) $a \sim_E b$ e $b \sim_E c \Rightarrow a \sim c$

Classes de Equivalência em A: A, E relação em A.

$a \in A$: $[a] = \{b \in A, b \sim a\} \neq \emptyset$; $a \sim b \iff [a] = [b]$

$A/\sim \equiv$ conjunto das classes de equivalência ~~em~~ de A.

Notação: $a, b \in A$; $a \sim_E b$ ($(a,b) \in E$)

1-) Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos | Sec. 2.2.2.0
2-) Divisão Euclidiana | 2.2.2.1

1-) Sejam G e H grupos quaisquer. Consideramos a função $\phi: G \to H$.
ϕ é um homomorfismo de G em H se:

$$\boxed{\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1)\,\phi(g_2)}\ , \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

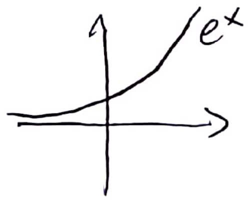
• ϕ é um isomorfismo de G em H se for um homomorfismo e se for bijetora $\Rightarrow \phi^{-1}: H \to G$.

$$\phi^{-1}(h_1, h_2) = \phi^{-1}(h_1)\,\phi^{-1}(h_2)\ , \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

Ex: $G = GL(\mathbb{C}, n)$; $H = (\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$

(homomorfismo) $\det: Mat(\mathbb{C}, n) \to \mathbb{C}$
$A, B \in GL(\mathbb{C}, n) \rightsquigarrow \det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

EX| $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{R}_+, \cdot)$. A função $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x \in \mathbb{R}_+$ é um homomorfismo e um isomorfismo



2-) Divisão Euclidiana:

Seja $n \in \mathbb{N}$, fixo

Seja $m \in \mathbb{Z}$, então existem:

$1.\ q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, únicos tais que: $\boxed{m = qn + r}$

$r \equiv$ resto da divisão de m por n $\boxed{r = m \bmod n}$

Grupo $\mathbb{Z}_n$:

$$\mathbb{H}_n = \{e^{2\pi i \frac{k}{n}}, k = 0, \dots, n > 1\} = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$$

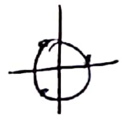
Prova que $\mathbb{H}_n$ é um grupo:

$$\left.\begin{aligned} \phi_k &= e^{2\pi i \frac{k}{n}} \\ \phi_l &= e^{2\pi i \frac{l}{n}} \\ k + l &= qn + r \end{aligned}\right\} \quad \phi_k \phi_l = e^{2\pi i \left(\frac{k+l}{n}\right)} = e^{2\pi i \left(q + \frac{r}{n}\right)} = e^{2\pi i \frac{r}{n}} \in \mathbb{H}_n$$

$$e^{2\pi i (q + \frac{r}{n})} \downarrow \underbrace{e^{2\pi i q}}_{1,\ q \in \mathbb{Z}} \cdot e^{2\pi i \frac{r}{n}}$$

$\mathbb{F}_1 = \{1\} \longrightarrow$ 

$\mathbb{H}_2 = \{-1, 1\} \longrightarrow$ 

$\mathbb{H}_3 = \{1, e^{\frac{2\pi i}{2}}, e^{-2\pi i/3}\}$ 

$\mathbb{H}_4 = \{1, -1, i, -i\}$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\boxed{a \mathring{+} b = (a+b) \bmod n \equiv r}$$

$a, b \in \mathbb{Z}_n$, $a+b = qn+r$

Relação de Equivalência em $\mathbb{Z}_n$: $a, b \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow a \sim b$ se $a-b = q.n$ para algum $q \in \mathbb{Z}_n$

1-) $a \sim a \Rightarrow a - a = 0.n$

2-) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, $b-a = q.n$

3-) $a \sim b$, $b \sim c$, $a \sim c \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} a-b = q_1 n \\ b-c = q_2 n \end{matrix}\right\}$ $a-c = (q_1+q_2)n$

$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], .., [n-1]\} \Rightarrow [a]+[b] = [a+b] = [a \mathring{+} b]$

$[a]^{-1} = [a \bmod n]$

Grupo de Grothendieck $\to$ Sec 2.6.1

Seja S um semi-grupo abeliano $(S, +) \to a+b = b+a$

$a+(b+c) = (a+b)+c$

$S = \{1, 2, 3, \dots\}, +$

$S \times S = \{(a,b), a, b \in S\}$

$(a,b) \sim (a', b')$ se existir ao menos um $p \in S$ tal que:

$a+b'+p = a'+b+p$

Obs: $-p \notin S$

$$\boxed{(S\times S)/\sim \; = \Gamma(S)}$$

1-) $(a,b)\sim(a,b) \Rightarrow a+b+p = a+b+p$

2-) Se $(a,b)\sim(a',b') \Rightarrow (a',b')\sim(a,b) \Rightarrow a+b'+p = a'+b+p$

$a'+b+p = a+b'+p$

3-) $(a,b)\sim(a',b')$, $(a',b')\sim(a'',b'') \Rightarrow (a,b)\sim(a'',b'')$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a+b'+p_1 = a'+b+p_1 \\ a'+b''+p_2 = a''+b'+p_2 \quad \oplus \\ \hline \end{array}$$

$$a+b''+\underbrace{(b'+p_1+a'+p_2)}_{p_3} = a''+b+\underbrace{(a'+p_1+b'+p_2)}_{p_3}$$

<u>SxS</u>

$[(a,b)]+[(c,d)] = [(a+c,\ b+d)]$

$e = [(a,a)]$

$-[(a,b)] = [(b,a)]$

<u>Ex</u>: $k(S) = \{[(a,b)],\ a,b\in\mathbb{N}\}$. Lembre que $(a,b)\sim(a',b')$

se $a+b'+p = a'+b+p$, $[(a,b)] \ni (a',b')$ $a+b' = a'+b$

$\rightarrow$ $\underline{b-a = b'-a'}$,

$(1,3)\sim(2,4)\sim(3,5)$ $\therefore$ $[(5,3)] = +2$

$(5,3)\sim(4,2)\sim(3,1)$ $[(3,5)] = -2$

$[(a,a)] \rightsquigarrow$ elemento neutro.

Tópicos discutidos: 1- Corpos
2- Espaço Vetorial
3- Álgebras
4- Álgebras de Lie

Cap 2 (Sec 2.1.4)

1-) Corpos:

$(K, +, \cdot)$

I) $(K, +)$ é um grupo abeliano ; $0 \equiv$ elemento neutro

II-) $K \setminus \{0\}$ é um grupo abeliano.

III-) Distributividade:

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(-\alpha) + \alpha = 0$

EX 1: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$:

$\mathbb{Q}(p) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ $p \equiv$ primo

↳ $(a+b\sqrt{p})^{-1} = \dfrac{1}{a+b\sqrt{p}} = \dfrac{a-b\sqrt{p}}{(-)(+)} = \dfrac{a-b\sqrt{p}}{a^2-b^2p} = \left(\dfrac{a}{a^2-pb^2}\right) + \left(\dfrac{-b}{a^2-pb^2}\right)\sqrt{p}$

$\underset{\mathbb{Q}}{\Uparrow}$ $\underset{\mathbb{Q}}{\Uparrow}$

• Em $\mathbb{Q}(p)$, $a-b\sqrt{p} \neq 0$, poi no caso $a-b\sqrt{p}=0 \Rightarrow p=\frac{a^2}{b^2}$, o que contradiz a definição de p.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo}}}{\mathbb{Z}_n} = \{ \underbrace{e^{2\pi i \frac{k}{n}}}_{\varphi_k}, k=0,\dots, n-1 \} \quad \cancel{z}^n = 1$$

<u>Teorema:</u> $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se o somente se n for primo

$$\varphi_k \mathring{+} \varphi_\ell = \varphi_k \varphi_\ell \;\Big|\; e^{2\pi i \frac{k}{n}} + e^{2\pi i \frac{\ell}{n}} \neq e^{2\pi i \left(\frac{k+\ell}{n}\right)}$$

$$e^{2\pi i \frac{k}{n}} \cdot e^{2\pi i k/n} = e^{2\pi i \frac{k\ell}{n}}$$

2-) Espaços Vetoriais:

$$(V, K, +, \cdot)$$
$$\hookrightarrow (K, +, \cdot, 0, 1)$$

<u>Propriedades:</u>

1-) $(V, +)$ Grupo Abeliano ; $0 \equiv e$

2-) $(V, \cdot)$: $(\underset{\substack{\uparrow \\ K}}{\alpha}, \underset{\substack{\uparrow \\ V}}{v}) \longmapsto \alpha \cdot v \in V$

I-) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

II-) $\alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u$

III-) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v$

$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_k \in \mathbb{C}\}$

Ex]: Seja $V = (0,1)$

$a + b = \dfrac{ab}{1-a-b+2ab}$; $\alpha \cdot a = \dfrac{a^\alpha}{a^\alpha + (1-a)^\alpha}$; $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

↳ $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ em $V \to$ $1 \to$ elemento neutro

$\vec{0} = \frac{1}{2}$ vetor nulo

· Sec 2.1.5

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$(x_1, x_2) \dots$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}, +, \cdot)$? $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$z = x + iy$

$z\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$x\mathbb{1} + yJ$; $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\underbrace{J^2 = -\mathbb{1}}$

3-) Álgebras:

$$(\underbrace{A, K, +}_{\text{espaço vetorial}}, \cdot)$$

$$a, b \in A \longmapsto a \cdot b \in A$$

P_1-) $a(b+c) = ab + ac$

P_2-) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a(\alpha \cdot b)$

Se $a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow A$ é abeliana

Se $a(bc) = (a \cdot b)c \Rightarrow A$ é dita associativa

$a(b+c) = ab + ac$; $(a+b)c = ac + bc$

$A = Mat(\mathbb{C}, n)$

$J = Mat(\mathbb{C}, n), \circ \Rightarrow A \circ B = \frac{1}{2}(AB, BA)$

abeliano, não associativo ($A \circ B = B \circ A$)

Jordan

$$\boxed{(A \circ A) \circ (A \circ B) = A \circ ((A \circ A) \circ B)}$$

4-) Álgebras de Lie:

Conjunto A de espaços vetoriais

$$\boxed{a \cdot b \equiv [a,b]}$$

- $\alpha [a,b] = [\alpha a, b] = [a, \alpha b]$
- $[a, b+c] = [a,b] + [a,c]$
- $[a+b, c] = [a,c] + [b,c]$

P1) $[a,b] = -[b,a]$ anticomutatividade

P2) $\left[[a,b],c\right] + \left[[c,a],b\right] + \left[[b,c],a\right] = 0$ Propriedade de Jacobi

ex: $A = \mathbb{R}^3$, $[a,b] = a \times b$

$A = \mathbb{R}^3$

$A = M_{AT}(\mathbb{F}, n)$; $[a,b] = ab - ba$ (comutador)

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(p,q)$ $\{f,g\}(p,q) = \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial g}{\partial q} - \dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial g}{\partial p}$

Colchete de Poison.

Álgebras:

$A \equiv$ espaço vetorial

$a, b \in A \longmapsto a \cdot b \in A$

1-) $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

2-) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3-) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$

A é dita abeliana $\rightsquigarrow$ $a \cdot b = b \cdot a$

A é dita associativa $\rightsquigarrow$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

A é dita unital se existir:

$e \in A$ tq: $a \cdot e = e \cdot a = a$

EX: $A = Mat(\mathbb{R}, n) \longrightarrow A \cdot B = AB$

$e = \mathbb{1}$

EX (Jordan) $A = Mat(\mathbb{R}, n)$

$A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$

$\mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3)$

$\hookrightarrow$ comutativa unital: $e = (1, 1, 1)$

$\mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 y_1, x_2 y_2 - x_3 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2)$

$e = (1, 1, 0)$

EX]

- $\mathbb{R}^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_k \in \mathbb{R}\}$

→ elemento de linha na relatividade

$$(x_0, x_1, x_2, x_3)\cdot(y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3\ ;\ x_0y_1 + y_0x_1 + x_2y_3 - x_3y_2\ ;$$
$$x_0y_2 + y_0x_2 + x_3y_1 - x_1y_3\ ;\ x_0y_3 + y_0x_3 + x_1x_2 - y_2y_1).$$

→ Álgebra dos Quaternos: $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$

↳ Não comutativa
Associativa
Unital

- $(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 e + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

$e = (1, 0, 0, 0) \rightarrow$ unidade de $\mathbb{H}$

$i = (0, 1, 0, 0)$

$j = (0, 0, 1, 0)$

$k = (0, 0, 0, 1)$

$a \in \mathbb{R}^4$

- $a \cdot e = e \cdot a = a$

$(i)^2 = (j)^2 = (k)^2 = -e$

$i \cdot j = -j \cdot i\ ,\quad ik = -ki,\quad jk = -kj$

$$\boxed{ij = k\ ,\quad ki = j\ ,\quad jk = i}$$

$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow \|x\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

- $\overline{x} = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$

$$\boxed{x^{-1} = \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{H}}^2} \cdot \overline{x}}$$

$\|x \cdot y\|_{\mathbb{H}} = \|x\|_{\mathbb{H}} \cdot \|y\|_{\mathbb{H}}$

$$\mathcal{A} = \{ M(a,b),\ a,b \in \mathbb{C} \}$$

$$M(a,b) := \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix}$$ Provar que $M(a,b)\,M(c,d) = M(ac - b\bar{d},\ ad + b\bar{c})$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_0 - i x_3,\ x_2 + i x_1)$$

$$\mathbb{H} \ni x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto \mathcal{M}(x) = M(x_0 - i x_3,\ x_2 + i x_1)$$

$$\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} x_0 - i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_0 + i x_3 \end{pmatrix} = x_0 \mathbb{1} + i\,(x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3)$$

<u>Matrizes de Pauli</u>

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(x \cdot y) = \mathcal{M}(x) \cdot \mathcal{M}(y)$$

$$\mathbb{H} \longmapsto \mathcal{A}$$

$$\boxed{\det(\mathcal{M}(x)) = \|x\|_{\mathbb{H}}^2}$$

$\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$

$\mathbb{H}_1 = \{ (x_0, \dots, x_3),\ \|x\|_{\mathbb{H}} = 1 \}$

$e \in \mathbb{H}_1$, pois $e = (1,0,0,0)$

$x \in \mathbb{H}_1$, $\det(\mathcal{M}(x)) = 1$.

Álgebra de Lie:

$L \equiv$ Álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$a \cdot b \equiv [a,b]$$

1-) $[a, b+c] = [a,b] + [a,c]$

2-) $[a+b, c] = [a,c] + [b,c]$

3-) $\alpha [a,b] = [\alpha a, b] = [a, \alpha b]$

4-) $[a,b] = -[b,a]$ (Anticomutatividade)

5-) $[[a,b],c] + [[c,a],b] + [[b,c],a] = 0$ (Identidade de Jacobi)

Ex: $L = \mathbb{R}^3$

$[a,b] = a \times b$; $a, b \in \mathbb{R}^3$

Ex: $A \equiv$ Álgebra Associativa

$[a,b] = ab - ba$

$\rightsquigarrow$ Sec. 2.1.7

Ex: $L = \mathrm{MAT}(\mathbb{C}, n)$ (Sobre $\mathbb{C}$)

$[A,B] = AB - BA$

ou $L = \mathrm{MAT}(\mathbb{R}, n)$ (Sobre $\mathbb{R}$)

$\underline{EX}$ $L = \{A \in M_{AT}(\mathbb{R}, n) ; A^t = -A\}$; $[A,B] = AB - BA$

↳ formam um espaço vetorial

$A^t = -A, \ B^t = -B$

$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \underline{-(\alpha A + \beta B)}$

$[A,B]^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -[A,B]$

$\underline{\text{Anticomutador}}$: $\{A, B\} = AB + BA$

$\{A,B\}^t = \{A,B\}$

$\underline{EX}$ $L = \{A \in M_{AT}(\mathbb{C}, n) ; A^* = -A\}$ $\quad A^* = \overline{A}^t$ (matriz adjunta)

L é um espaço vetorial $\underline{\text{Real}}$

$[A,B]^* = -[A,B]$

$\underline{EX}$ $L = \{A \in M_{AT}(\mathbb{C}, n) ; A^* = -A, \ Tr(A) = 0\}$

$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$; $Tr(AB) = Tr(BA)$

$Tr([A,B]) = 0$

$\underline{EX}$ $M \in M_{AT}(\mathbb{R}, n)$; $L_M = \{A \in M_{AT}(\mathbb{R}, n) ; AM = -MA^t\}$

$A, B \in L_M$; $[A,B] \in L_M$

$$[A,B]M = ABM - BAM = -AMB^t + BMA^t = MA^tB^t - MB^tA^t$$
$$= M(A^tB^t - B^tA^t)$$
$$= \underline{-M[A,B]^t}$$

Grupo de Heisenberg: Sec 22.22:

$$GH_3(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{C} \right\} \rightsquigarrow \text{um grupo}$$

$$H(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \boxed{H(0,0,0) = \mathbb{1}}$$

$$\boxed{H(a,b,c)\,H(a',b',c') = H(a+a', b+b', c+c'+ab')}$$

$$\boxed{H(a,b,c)^{-1} = H(-a,-b,ab-c)}$$

$$gh_3(\mathbb{C}) = \left\{ h(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$$

↳ Espaço Vetorial sobre os complexos

↳ Não formam um grupo, mas uma álgebra de Lie.

$$[h(a,b,c) ; h(a',b',c')] = h(0,0,ab'-a'b)$$

$$z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow e^z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$A \in M_{AT}(\mathbb{C}, n)$

$$\boxed{e^A = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$ Exponencial de Matriz

$$e^{h(a,b,c)} = \mathbb{1} + \frac{1}{1!} h(a,b,c) + \frac{1}{2!} (h(a,b,c))^2 + \cancel{\frac{1}{3!} (h(a,b,c))^3} \to 0 \quad ; \ \underline{\text{note:}}$$

$$(h(a,b,c))^3 = 0 \rightsquigarrow \underline{\text{matriz nulipotente}}$$

$$\Rightarrow e^{h(a,b,c)} = \mathbb{1} + h(a,b,c) + \frac{h(a,b,c)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= H\left(a, b, c + \frac{ab}{2}\right)$$

$\downarrow$

Matriz do grupo de Heisenberg

$\rightsquigarrow$ todo elemento de $GH_3(\mathbb{C})$ pode ser escrito como uma exponencial da álgebra de Lie $gh_3(\mathbb{C})$ (gerador infinitesimal)

$$\boxed{e^{h(a,b,c-\frac{ab}{2})} = H(a,b,c)}$$

$$\underbrace{p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \hbar = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } gh_3(\mathbb{C})}$$

$$\boxed{[p, \hbar] = 0 ; \ [q, \hbar] = 0 ; \ [p, q] = -i\hbar}$$

$\Rightarrow$ Relação de Comutação da Mecânica Quântica.

Formas Bilineares
Formas Sesquilineares
Produtos Escalares

} Capítulo 3

Forma Bilinear em V:

$\hookrightarrow$ Espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

$w: V \times V \to \mathbb{R}$, $w(u,v) \in \mathbb{R}$, com $u, v \in V$

1-) $w(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 w(u, v_1) + \alpha_2 w(u, v_2)$

2-) $w(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 w(u_1, v) + \alpha_2 w(u_2, v)$

$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$

$$\boxed{w(x,y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \; ; \quad \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k}$$

$P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}$

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k y_k \rightarrow A = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{pmatrix}$$

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{n-1} P_k x_k y_k \rightarrow A = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & P_{n-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

EX 1: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$; $A \in M_{AT}(\mathbb{R}, n)$

$$w(x,y) = \langle x, Ay \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k (Ay)_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k A_{kl} y_l$$

Produto Escalar em V (sobre $\mathbb{R}$):

$\omega : V \times V \to \mathbb{R}$

1-) ω é uma forma bilinear

2-) $\omega(u,v) = \omega(v,u)$ (simetria)

3-) $\omega(u,u) \geq 0$

4-) $\omega(u,u) = 0 \iff u = 0$

$V = \mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

↳ produto escalar

$\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \geq 0$

$\omega(x,y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}}$, $A \in Mat(\mathbb{R}, n)$

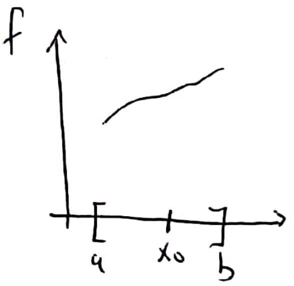
1-) Os autovalores de A são todos positivos

2-) $A^t = A$

$A = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$, $p_k > 0$

$\omega(x,y) = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k y_k$; $\omega(x,x) = \langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k)^2 \geq 0$

$\langle x, Ay \rangle_{\mathbb{R}} = \langle A^T x, y \rangle \Rightarrow (A^t)_{ij} = A_{ji}$

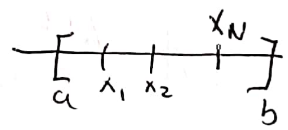


$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$C([a,b], \mathbb{R}) \equiv V$

$f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$

$\omega(f,g) = f(x_0) g(x_0)$



$x_n \in [a,b]$

$\boxed{\omega(f,g) = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)}$, $p_k \in \mathbb{R}$

$$w(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$p: [a,b] \to \mathbb{R}$

$p \equiv$ contínua

$$w(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)p(x)\,dx$$

$\hookrightarrow \; w(f,f) = \int_a^b (f(x))^2 dx = 0 \Rightarrow \underline{f(x) = 0}$

$W: V \times V \to \mathbb{R}$

1-) w é bilinear

2-) $w(u,v) = w(v,u)$

3-) $w(u,u) \geq 0$

4-) $w(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$V \equiv$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$

$w: V \times V \to \mathbb{C}$

1-) $w(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 w(u, v_1) + \alpha_2 w(u, v_2)$

2-) $w(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \overline{\alpha_1}\, w(u_1, v) + \overline{\alpha_2}\, w(u_2, v)$

$V = \mathbb{C}^n$

EX: $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$, $Z_k \in \mathbb{C}$, $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$, $W_k \in \mathbb{C}$

$$\langle Z, W \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z_k} W_k$$

$$w(Z,W) = \langle Z, AW \rangle_{\mathbb{C}}, \quad A \in Mat(\mathbb{C}, n)$$

Produto Escalar em V sobre $\mathbb{C}$:

$w: V \times V \to \mathbb{C}$

1-) w é sequilinear

2-) $w(Z,W) = \overline{w(W,Z)}$

3-) $w(Z,Z) \geq 0$

4-) $w(Z,Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

EX: $\langle Z, W \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z_k W_k}$

$\overline{\langle Z, W \rangle} = \sum_{k=1}^{n} \overline{W_k} Z_k = \langle W, Z \rangle_{\mathbb{C}}$

$w(Z,W) = \langle Z, AW \rangle_{\mathbb{C}}$, $A \in Mat(\mathbb{C}, n)$, $A = A^* = \overline{A}^t$

autovalores ≥ 0

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} w_k \Rightarrow \langle z, Mw\rangle_{\mathbb{C}} = \langle M^* z, w\rangle_{\mathbb{C}}, \quad M \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$$

$$M^* = \overline{M^t}$$

$$\langle z, Mw\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}(Mw)_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{z_k} M_{kl} w_l = \sum_{l=1}^{n} w_l \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} M_{kl}$$

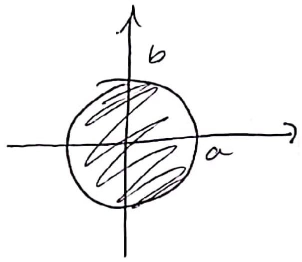
$$= \sum_{l=1}^{n} w_l \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{M_{kl}} z_k\right)} = \sum_{l=1}^{n} \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{M_{kl}} z_k\right)} w_l = \sum_{l=1}^{n} \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} (M^*)_{lk} z_k\right)} w_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \overline{(M^* z)_l}\, w_l = \underline{\langle M^* z, w\rangle}$$

- $SO(2) = \{ R \in Mat(\mathbb{R},n) ;\ R^t = R^{-1} ;\ \det R = 1 \}$

$R \in SO(2)$, $R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\boxed{a^2+b^2=1}$ ⇝ Vínculo.

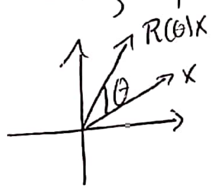
Associação de um grupo com pontos no espaço



- $a = \cos\theta$
  $b = -\sin\theta$; $R \in SO(2) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Interpretação geométrica:

Matriz de rotação por ângulo θ



- $X \cdot y = \langle X, y \rangle_{\mathbb{R}} = \|X\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$

$R(\theta)$:

1-) $R(0) = \mathbb{1}$

2-) $R(\theta) R(\theta') = R(\theta + \theta')$

$$J = \left.\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gerador

$|\theta| \ll \pi$ → fazer alguma coisa "gerador do grupo"

$$R(\theta) = e^{\theta J} \simeq \mathbb{1} + \theta J$$

↳ fazer nada

-

$$e^{\theta J} = \mathbb{1} + \sum_{k\geq 1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} J^k \quad ; \quad J^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow J^{2n} = (-\mathbb{1})^n$$
$$J^{2n+1} = (-1)^n J$$

Cap 22 Sec 22.3

$$V = \mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} ; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\omega(z,w) = \sum_{k=1}^{3} \bar{z}_k w_k = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$U(2) = \{ U \in M_{AT}(\mathbb{C}, 2), \langle Uz, Uw \rangle_{\mathbb{C}} = \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} ; z, w \in \mathbb{C}^2 \}$$

$U^* = U^{-1}$ matrizes unitárias

$$U(2) = \{ U \in M_{AT}(\mathbb{C}, 2) ; U^* = U^{-1} \}$$

$$SU(2) = \{ U \in U(2) ; \det U = 1 \}$$

$U \in U(2) \qquad S \in SU(2)$

$U = e^{i\alpha} S \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$U \in SU(2) ; U^* = U^{-1}$

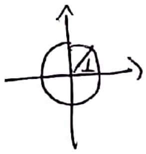
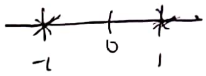
$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{C} \rightsquigarrow U^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} ; U^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det U}_{1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

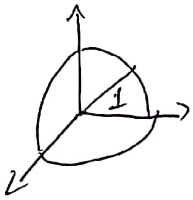
$$\Rightarrow \bar{a} = d , \bar{d} = a , \bar{b} = -b , \bar{c} = -c$$

- $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ; a,b \in \mathbb{C} ; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$

Esfera de raio 1 em $\mathbb{C}^n$, S^{n-1}

$S^{n-1} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1 \}$

$S^1 =$  $S^0 = \{-1, 1\}$ 

- $S^2 =$ 

$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} ; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} ; a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \right\}$

$(a_1, a_2, b_1, b_2) \in S^3$

$a_1 = \cos\theta$
$b_1 = \eta_2 \sin\theta$
$b_2 = \eta_1 \sin\theta$
$a_2 = \eta_3 \sin\theta$

$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$
$\|\vec{\eta}\| = 1$

- $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a,b) \in S^{-1} \right\}$

$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \left[a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3} + b_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} + b_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1} \right]$

$SU(2) \ni U = a_1 \mathbb{1} + i (b_2 \sigma_1 + b_1 \sigma_2 + a_2 \sigma_3)$

$= \cos\theta \, \mathbb{1} + i (\eta_1 \sin\theta \, \sigma_1 + \eta_2 \sin\theta \, \sigma_2 + \eta_3 \sin\theta \, \sigma_3)$

- $= \cos\theta \, \mathbb{1} + i \sin\theta \, \vec{\eta} \cdot \vec{\sigma}$

$\vec{\sigma} = \underbrace{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}_{\text{matrizes de Pauli}}$

$$SU(2) = \{ \cos\theta \mathbb{1} + i \sin(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) ; -\pi \leq \theta \leq \pi, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 ; \|\vec{\eta}\| = 1 \}$$

$$\boxed{SU(2) = \{ e^{i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} ; -\pi \leq \theta \leq \pi , \vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 ; |\vec{\eta}| = 1 \}}$$

↳ implementa rotações 3D p/ partículas com spin $\frac{1}{2}$

$$SO(2) = \{ e^{\theta J} , -\pi \leq \theta \leq \pi \} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ <u>Matrizes de Pauli</u> compoem uma <u>álgebra de Lie</u>

$$[\sigma_a , \sigma_b] = 2i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \sigma_c$$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} , \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}] = 2i(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\sigma} \longrightarrow \text{(pode cair em prova)}$$

<u>dem</u>: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{a=1}^{3} \alpha_a \sigma_a \qquad \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{b=1}^{3} \beta_b \sigma_b$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}, \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}] = \left[\sum_{a=1}^{3} \alpha_a \sigma_a , \sum_{b=1}^{3} \beta_b \sigma_b \right] = \sum_{a=1}^{3} \sum_{b=1}^{3} \alpha_a \beta_b [\sigma_a , \sigma_b]$$

$$= 2i \sum_{c=1}^{3} \underbrace{\left(\sum_{b=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \alpha_a \beta_b \varepsilon_{abc} \right)}_{(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})_c} \sigma_c = 2i \sum_{c=1}^{3} (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})_c \sigma_c = \boxed{2i(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\sigma}}$$

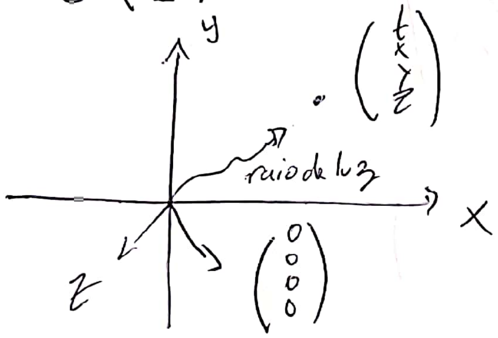
$\Theta(1,1)$

$$X = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix}$$

$$w(x,y) = \langle x, \eta y \rangle$$

$$x, y \in \mathbb{R}^2 \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad w(x,y) = x^0 y^0 - x^1 y^1$$

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \equiv \text{Espaço-tempo}$$



$$c \simeq 3 \cdot 10^8 \, km/s$$

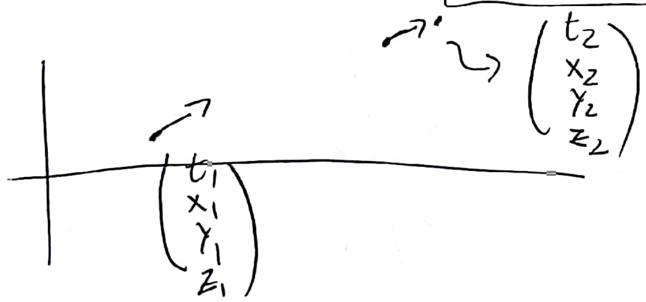
$$c = \frac{\|\vec{x}\|}{t} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 t^2 = \|\vec{x}\|^2$$

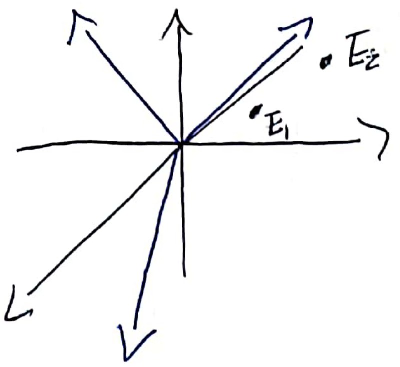
$$c^2 t^2 - \|\vec{x}\|^2 = 0$$

$$\boxed{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0}$$



$$c = \frac{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|}{t_2 - t_1} \Rightarrow c^2 (t_2 - t_1)^2 - \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 = 0$$

$$\boxed{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = 0}$$



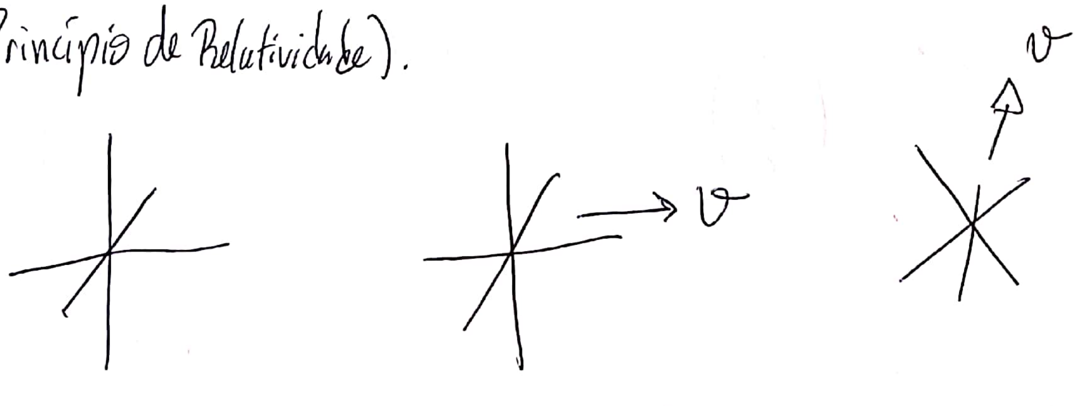
$\rightsquigarrow$ partida e chegada de um raio luminoso.

outro sistema de referência

$$E_1 \to \begin{pmatrix} t_1' \\ x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 \to \begin{pmatrix} t_2' \\ x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c^2(t_2'-t_1')^2 - \left((x_1'-x_2')^2 + (y_1'-y_2')^2 + (z_1'-z_2')^2\right) = 0}$$

Sistemas de referencias diferentes devem descrever a mesma física. Além disso, a velocidade da luz deve ser constante. (Princípio da Relatividade).



$\rightsquigarrow$ diferentes sistemas, onde a mesma física deve ser descrita.

$$\underbrace{x^0 = ct}$$

$$E = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$ (saída e chegada de um raio luminoso)

$$(x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 = 0$$

↳ é $\boxed{\text{zero}}$ em qualquer outro sistema de referência.

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ⇝ Tensor métrico, Métrica de Minkovisky

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^0 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle (X_1 - X_2), \eta (X_1 - X_2) \rangle_{\mathbb{R}} = 0}$$ ⇝ maneira mais compacta

↳ note que se trata de uma forma bilinear

$$\omega(x, y) = \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}$$

Intervalo entre eventos: X_1, X_2 eventos de $\mathbb{R}^4$:

$$\boxed{I(X_1,X_2) = \langle (X_1-X_2), \eta(X_1-X_2) \rangle_{\mathbb{R}}}$$

X_1, X_2 são:

- Tipo Luz, se $I(X_1,X_2)=0$
- Tipo Tempo, se $I(X_1,X_2)>0$
- Tipo Espaço, se $I(X_1,X_2)<0$

tipo tempo: $I(X_1,X_2)>0$

$$c^2(t_1-t_2)^2 - \|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|^2 > 0$$

$$c^2 > \underbrace{\frac{\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|^2}{(t_1-t_2)^2}}_{v^2} \rightarrow \boxed{c^2 > v^2}$$

↳ Velocidade de um sinal que parte de E_1 e chega em E_2 com velocidade v

↳ Pode haver uma relação causal entre os dois eventos (um implica o outro).

- Tipo Espaço: Eventos causalmente não relacionados.

$$I(x_1, x_2) < 0$$

$$c^2(t_1-t_2)^2 - \|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|^2 < 0 \Rightarrow c^2 < \frac{\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|^2}{(t_1-t_2)^2} = v$$

E_1 não pode causar E_2 pois necessita uma velocidade v maior que a da luz para que isto aconteça.

↳ hierarquiza os eventos, por questões de causalidade
Isso deve ocorrer para todos os diferentes sistemas de referência.

↳ Preservar a estrutura causal.

$$I(x_1, x_2) = 0 = I(x_1', x_2')$$

$$I(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow I(x_1', x_2') > 0$$

$$I(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow I(x_1', x_2') < 0$$

Como é a transformação que leva as coordenadas de <u>um</u> evento em um sistema de referências para <u>outro</u> sistema de referências?

↳ essas transformações precisam ser tais que a estrutura causal é mantida.

Ex|
$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Sec 22.6.2

São as transformações do tipo (Teorema).

$$\boxed{x' = Lx + b}$$

$$\begin{cases} b \in \mathbb{R}^4 \\ L \in O(1,3) \rightsquigarrow L^T \eta L = \eta \end{cases}$$

Ex|: $L = \mathbb{1}$, $x' = x + b$ (translação do sistema de coordenadas)

$$I(x_1', x_2') = \langle (x_2' - x_1'), \eta (x_2' - x_1') \rangle$$
$$= \langle x_2 - x_1, \eta (x_2 - x_1) \rangle$$
$$= I(x_1, x_2)$$

$x' = Lx$

$$I(x_1', x_2') = I(Lx_1, Lx_2)$$
$$= \langle (Lx_2 - Lx_1), \underbrace{L^T \eta L}_{\eta} (x_2 - x_1) \rangle_{\mathbb{R}} = I(x_1, x_2)$$

Ex1:

$$E \to \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \quad x^0 = ct$$

$L \in O(1,1)$

$$L^T \eta L = \eta \,; \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \eta^2 = \mathbb{1}$$

$\downarrow$

$$\underbrace{\eta L^T \eta}_{L^{-1}} L = \mathbb{1} \Rightarrow \boxed{L^{-1} = \eta L^T \eta}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow L^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}}_{\eta L^T \eta}$$

$$L^T \eta L = \eta$$

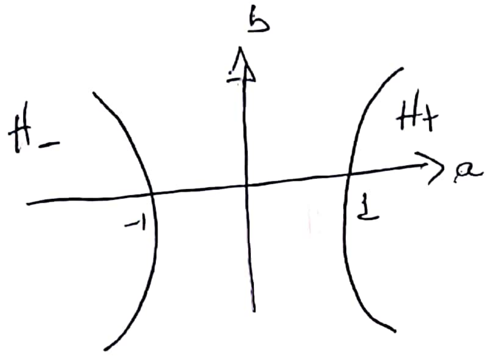
$$\det L^T \det \eta \det L = \det \eta \Rightarrow \det^2 L = 1 \Rightarrow \underline{\det L = \pm 1}$$

$$SO(1,1) = \{L, \; L^T \eta L = \eta, \; \det L = 1\} \to \underline{\text{Subgrupo}}$$

$$\to L^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{L \in SO(1,1) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a^2 - b^2 = 1}$$

$$SO(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; \ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$ (Grupo de Lorentz em 2D)

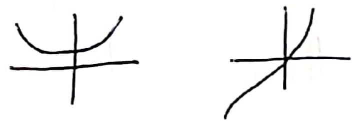
↳ hipérbole



parametrização

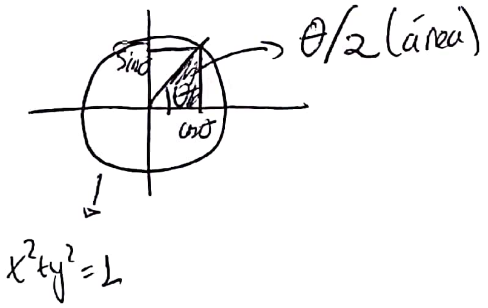
$$\begin{cases} a = \cosh z \\ b = -\sinh z \end{cases}$$

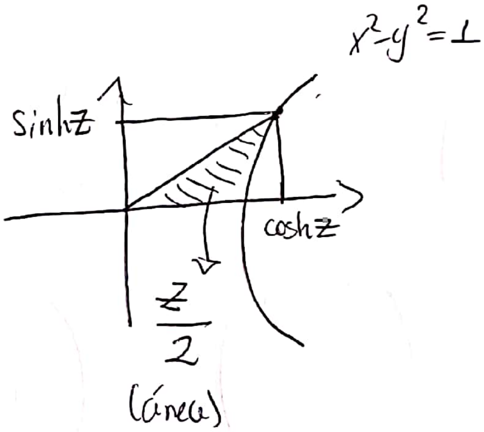
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$$



z = "rapidez"

Visão Geométrica





$$SO(1,1) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}}_{H_+} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -\cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & -\cosh z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}}_{H_-}$$

$$\frac{v}{c} \equiv \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \Rightarrow \boxed{-c < v < c}$$

↑ reparametrização.

$$\begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{B(v)}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = B(v) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$x^{0'} = \frac{\left(x^0 - \frac{v}{c} x^1\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad x^{1'} = \frac{x^1 - \frac{v}{c} x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad x' = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Transformação de Lorentz.

Sec. 22.3

$O(1,1)$; $\omega(x,y) = \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}}$;

↳ mantem ω invariante.

$L \in O(1,1)$; $\omega(Lx, Ly) = \omega(x,y)$; $x \longmapsto Lx$

$L^T \eta L = \eta$,

$$\boxed{O(1,1) = \{ L \in Mat(\mathbb{R},2) , \ L^T \eta L = \eta \}}$$

↳ Grupo de Lorentz (em 1+1)

$L \in O(1,1) \Rightarrow \det L = \pm 1$

$$O(1,1) = \underbrace{\{ L \in M_{AT}(\mathbb{R},2), \ L^T\eta L = \eta, \det L = 1 \}}_{SO(1,1)} \cup \{ L \in M_{AT}(\mathbb{R},2), \ L^T \eta L = \eta, \det L = -1 \}$$

↳ hipérbole

↳ não é subgrupo pois não possui identidade então é fechado.

$$SO(1,1) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \in H^+ \right\}}_{\boxed{\mathcal{L}_+^\uparrow \text{ (Grupo de Lorentz próprio)}}} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \in H^- \right\}}_{\mathcal{L}_+^\downarrow}$$

↳ ortócrono

$SO(1,1) =$ Grupo de Lorentz próprio ortócrono

- $\mathcal{L}_+^{\uparrow} = \left\{ L(z) = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

1) $L(z_1) L(z_2) = L(z_1 + z_2)$

2) $L(0) = \mathbb{1}$

$$L(z) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh z\, x^0 - \sinh z\, x^1 \\ -\sinh z\, x^0 + \cosh z\, x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} ; \begin{cases} x'^0 = \cosh z\, x^0 - \sinh z\, x^1 \\ x'^1 = -\sinh z\, x^0 + \cosh z\, x^1 \end{cases}$$

- Reparametrização:

$$\boxed{\frac{v}{c} = \operatorname{tgh} z}$$

$$L(z) = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} = B(v); \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = L(z) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = B(v) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'^0 = \dfrac{x^0 - \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x'^1 = \dfrac{x^1 - \frac{v}{c} x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = c\operatorname{tgh}(z) \rightarrow v \text{ e rapidez estão relacionados.} \\ z = \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) \rightarrow \text{vai de } -\infty \text{ a } \infty \end{cases}$$

"Boost" de Lorentz: $\rightsquigarrow$ Transformação para um referencial que se move com velocidade v (sem rotação)

$\downarrow$

- $$B(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\frac{v}{c}\gamma(v) \\ -\frac{v}{c}\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix}$$

$$L(z) = B(v); \quad v = c \operatorname{tgh}(z)$$

$\downarrow$ rapidez.

1) $L(0)=\mathbb{1} \longrightarrow B(0)=\mathbb{1}$

2) $L(z_1)L(z_2) = L(z_1+z_2) \longrightarrow \boxed{B(v_1)B(v_2) = B\left(\dfrac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\right)}$

OBS:

$$\begin{cases} L(z_1)L(z_2) = L(z_2)L(z_1) \\ B(V_1)B(V_2) = B(V_2)B(V_1) \end{cases} \longrightarrow \text{válido somente para } 1+1D$$

$$O(1,1) = SO(1,1) \cup \underbrace{\{L \in M_{AT}(\mathbb{R},2),\ L^T\eta L = \eta,\ \det L = -1\}}_{*}$$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix};\ a^2-b^2=1,\ (a,b)\in H^-\right\} \to \{TPB(v),\ v\in(-c,c)\}$$

$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

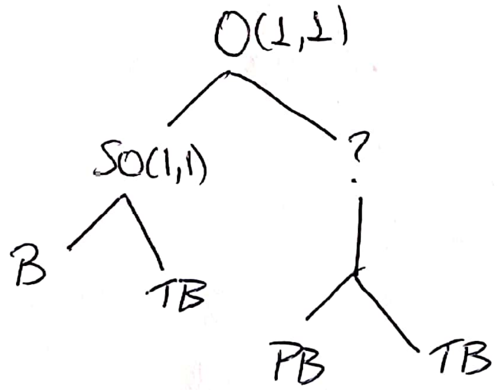
$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $(=\eta)$

↳ $\{B(v),\ v\in(-c,c)\}$

$*$ Segunda Parte do $O(1,1)$

$$= \{PB(v),\ v\in(-c,c)\} \cup \{TB(v),\ v\in(-c,c)\}$$

Determinante:
$B \to +1$
$T, P \to -1$
$TPB \to +1$
$TP, PB \to -1$



↳ compatível com a ramificação.

- $$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{\theta J}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $R(0) = \mathbb{1}$

2) $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2)$; $\qquad \left.\dfrac{dR(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = J$

$$\begin{cases} T\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \\ P\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- P: $x^0 = ct \to T\vec{X}$ reverto o sinal

T: $x \to -x$ (troca o sinal de t..)

↳ Reversão $\begin{cases} \text{P: temporal} \\ \text{T: Espacial} \end{cases}$

$$L(z) = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z \\ -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix}; \quad \left.\dfrac{dL(z)}{dz}\right|_{z=0} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gerador infinitesimal

- 1) $L(0) = \mathbb{1}$

2) $L(z_1)L(z_2) = L(z_1+z_2)$

$\Rightarrow L(z) = e^{zM}$

Grupo $SO(3)$ .. seção 22.3.2

(subgrupo de $O(3)$)

$$O(3) = \{ R \in M_{AT}(\mathbb{R},3),\ R^T = R^{-1} \},\ R \in O(3),\ \det R = \pm 1$$

$$SO(3) = \{ R \in M_{AT}(\mathbb{R},3),\ R^T = R^{-1},\ \det R = 1 \}$$

Todo $R \in O(3)$ pode ser escrito como

$$R = P_1 S, \quad S \in SO(3), \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow R \notin SO(3)$

$$(P_1)^2 = \mathbb{1} \text{ e } P_1^{-1} = P_1 = P_1^T, \quad P_1 \in O(3) \text{ e } \det P_1 = -1$$

$$R \in O(3) \setminus SO(3) \quad \det R = -1$$

$$S = P_1 R \Rightarrow S \in SO(3), \ \det S = (-1)(-1) = 1$$

$S \in O(3) \Rightarrow S \in SO(3)$, logo:

$R = P_1 S$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_0 \vec{x} = -\vec{x}$$

1) $R \in O(3) \setminus SO(3)$ tq: $\left.\begin{array}{l} S_1 = P_1 R \\ S_2 = P_2 R \\ S_3 = P_3 R \\ S_0 = P_0 R \end{array}\right] \in SO(3)$

$\Rightarrow R = P_1 S_1 = P_2 S_2 = P_3 S_3 = P_0 S_0$

Preserva a forma quadrática do produto escalar:

$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$, $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$

$\langle Rx, Ry \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y \rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^3$

Se $R \in SO(3)$ então existe $v \neq 0$ tq: $\boxed{Rv = v}$

Seja $R \in SO(3)$, $R \neq \mathbb{1}$:

$\det(\mathbb{1} - R) = \det(R^T R - R) = \det[(R^T - \mathbb{1})R]$

$= \det(R^T - \mathbb{1}) \det R = \det(R^T - \mathbb{1}) = \det(R - \mathbb{1})^T = \det(-(\mathbb{1} - R))$

$= -\det(\mathbb{1} - R) \Longleftrightarrow \boxed{\det(\mathbb{1} - R) = 0} \Rightarrow (\mathbb{1} - R)$ não tem inversa

Lembrando:

Se A não tem inversa, $\exists\, v$ tq $Av = 0$ (cap 9)

Assim:

$(\mathbb{1} - R)v = 0$, $v \neq 0 \Rightarrow Rv = v$

Teorema: Se $A \in MAT(\mathbb{C}, n)$ não possui inversa então existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, t.q. $Av = 0$

Uma matriz $A \in MAT(\mathbb{C}, n)$ possui inversa se e somente se

$$Av = 0 \to v = 0$$

I) A tem inversa:

$$Av = 0$$

$$A^{-1}Av = 0 \Rightarrow \mathbb{1}v = 0 \Rightarrow v = 0$$

II-) $Av = 0$ vale somente p/ $v = 0$

1) A injetora

2) A é sobrejetora

em 1) sejam $\overset{x \neq y}{x, y}$ tais que $Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$ (absurdo)

em 2) seja $\{b_1, \dots, b_n\}$ base em $\mathbb{C}^n$, $\{Ab_1, \dots, Ab_n\}$ são também linearmente independentes, logo todo $x \in \mathbb{C}^n$ pode ser escrito como:

$$x = \beta_1 Ab_1 + \dots + \beta_n Ab_n = A(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n)$$

$$V = \{v \in \mathbb{R}^3 ; Rv = v\}$$

$$\dim V = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \Rightarrow R = \mathbb{1} \end{cases}$$

Supor que $\dim V = 2 \Rightarrow \dim V^{\perp} = 1$

$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^3, \langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in V \}$

$Rv = v$

$R^T R v = R^T v$

$\mathbb{1} v$

$V^\perp$ é mantido invariante por R

Tomemos $w \in V^\perp$ $(w \neq 0)$ e $\langle Rw, v\rangle_{\mathbb{R}} = \langle w, R^T v\rangle = \langle w, v\rangle = 0$

então $\langle Rw, v\rangle = 0 \Rightarrow Rw \in V^\perp$

Então:

$Rw = \lambda w$

pq $Rw = 1.w \Rightarrow w \in V$

mas $w \in V^\perp$

$\langle Rw, Rw\rangle = \langle w, w\rangle$

$\shortparallel$

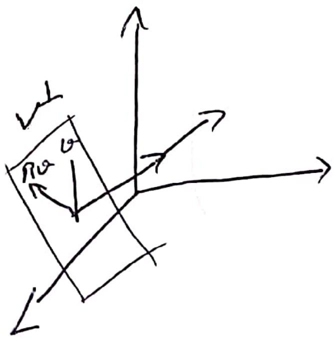
$\lambda^2 \langle w, w\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$ e $\lambda = \begin{cases} +1 \text{ (absurdo)} \\ -1 \Rightarrow \det(Rw) = -\det(w) \end{cases}$

$\Rightarrow \det R = -1$, mas

$R \in SO(3)$ e $\det R = 1$

Cap (22.3.2)

$\therefore \dim V = 1$



$b_1 \in V$

$b_2, b_3 \in V^\perp$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{r}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\hookrightarrow$ matriz ortogonal

$r \in SO(2)$, $\det R = \det r = 1$

$R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{r^T}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$ e $\mathbb{1} = R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{r r^T}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r^T r = \mathbb{1}_2$; $r = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\varphi \in (-\pi, \pi]$

$R \in SO(3)$

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(em torno de x)}$$

$$R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(em y)}$$

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(em z)}$$

$R_n \in SO(3)$, $n = 1,2,3$

$$R_k(\varphi) \cdot R_k(\varphi') = R_k(\varphi + \varphi')$$

$$R_k(0) = \mathbb{1}$$

$$d_k = \frac{d}{d\varphi} R_k(\varphi) \Big|_{\varphi=0} \quad k=1,2,3 \quad \text{(Matriz geradora de rotação)}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d_k)^T = -d_k, \quad \text{se } A = -A^T \Rightarrow A = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3 \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{J}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = -a J_3 + b J_2 + -c J_3; \quad \vec{\alpha} = (-c, b, -a)$$

$$J_1 = [J_2, J_3]; \quad J_3 = [J_1, J_2], \quad J_2 = [J_3, J_1]$$

São Álgebras de Lie

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{J},\ \vec{\beta}\cdot\vec{J}] = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{J}$$

$$R \in SO(2) \Rightarrow R = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{J\theta}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$ analogamente

$$R \in SO(3),\ R = R(\theta,\vec{n}) = e^{\theta(\vec{n}\cdot\vec{J})},\quad \vec{n}\in\mathbb{R}^3,\ \|\vec{n}\| = 1$$