

# Física III

## Lei de Coulomb:

↳ eletrostática: cargas em repouso.

→ Investigação experimental feita por Charles Coulomb, se baseando explicitamente na Lei da Gravitação de Newton, entretanto diferentemente desta, ela pode ser atrativa ou repulsiva. Visto que cargas elétricas podem ser tanto positivas quanto negativas.

Notação:  $\vec{F}_{ij}$  → força sobre a partícula  $i$  devido a  $j$ .

Portanto, a Lei de Coulomb é:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^2} \hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12}$$

onde  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$

$\epsilon_0 \rightsquigarrow$  permissividade do espaço livre.

## Princípio da Superposição:

↳ Resultado experimental de que as interações elétricas se sobrepõem sobre as outras → resultante vetorial. Ou seja a interação  $i$  mais de duas cargas pode ser analisada como pares isolados de interação.

Logo, a força  $\vec{F}$  sentida por uma carga ao redor de  $n$  cargas será:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Levando o princípio de superposição adiante, é possível levar a descrição de cargas pontiformes a uma escala macroscópica, levando em consideração não somente a carga, mas a distribuição de carga ao longo de um volume, uma superfície ou uma linha.

↳ Uma quantidade infinitesimal de carga espalhada numa porção infinitesimal de volume e concomitantemente para os casos de superfícies e linhas.

$$\begin{cases} dq = \rho dv \\ dq = \sigma ds \\ dq = \lambda dl \end{cases}$$

↳ elementos de volume, superfície, linha  
↳ densidade de carga (de volume, superficial, linear)

## Carga Elementar:

↳ Novamente por meio de processos experimentais se descobriu a carga elementar, onde todas as cargas são combinação lineares desta. Representada pela carga do elétron e do próton, onde

por convenção ao próton se deu a carga positiva e ao elétron a carga negativa.

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## Campo Elétrico:

Podemos ser definido através da força eletromagnética num conjunto de cargas puntiformes:

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E}_i$$

Onde  $\vec{E}_i$  é o que chamamos de campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{q_i}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

↳ N/C (SI)

Toda carga  $q_i$  gera ao seu redor, um campo elétrico que tende a zero, à medida que se afasta da carga  $q_i$  ( $r \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E} \rightarrow 0$ )

Para descobrir e medir a intensidade do campo é utilizada uma carga de prova. Se na posição da carga de prova houver um campo, a manifestação do mesmo se dá pela presença de uma força coulombiana.

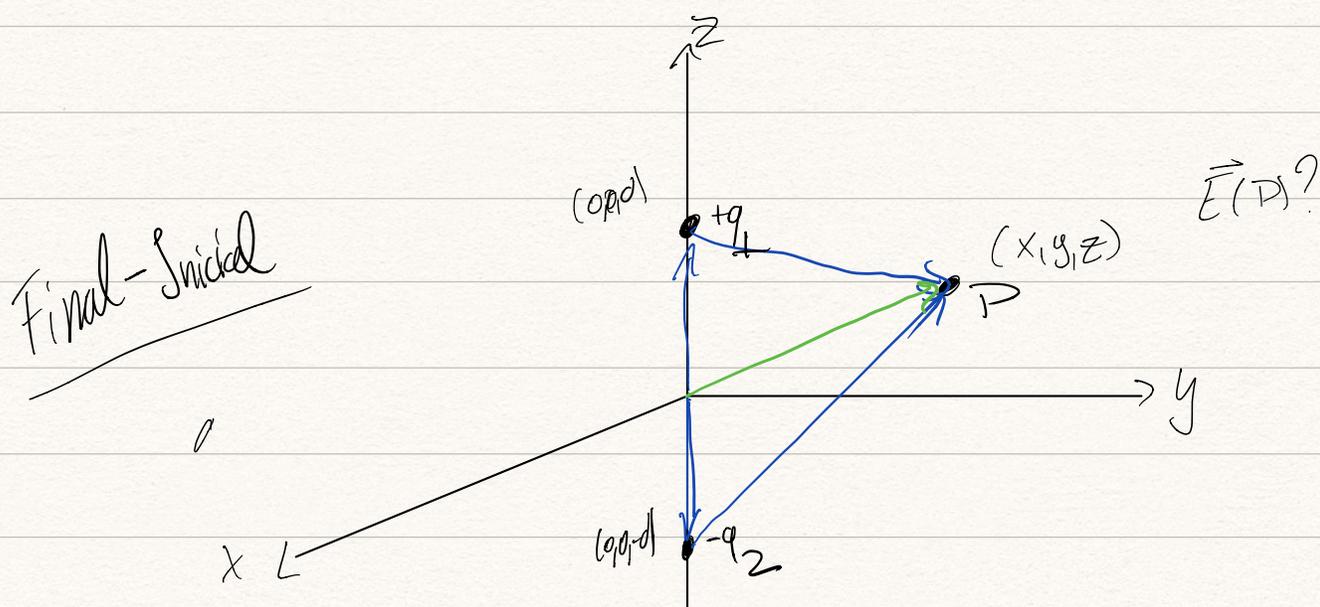
↳ No entanto, é importante saber que a própria carga de prova, gera também o seu próprio campo que pode acabar perturbando o campo original. Para contornar a situação, o valor da carga de prova deve ser o menor possível.

Com a introdução da noção de campo, há uma grande diferença no tratamento das interações entre partículas carregadas. Anteriormente duas partículas interagiam devida a força de Coulomb, tendo uma intuição que a "força atua a distância". Agora, cada partícula (carregada) gera o seu próprio campo que teoricamente se estende até o infinito. Campo esse que se estende com velocidade finita (da luz). Ao passar por outra partícula carregada, há a interação entre as duas partículas mediada pelo campo, cujo resultado é a presença de uma força.

Logo a força não é imediata, ela depende da propagação do campo. O mesmo ocorre com a gravidade e o campo gravitacional.

EX1: Carga pontiforme  $-q$  em  $(0,0,-d)$  e outra  $+q$  em  $(0,0,d)$ .

Qual o campo num ponto  $P$  genérico de coordenadas  $(x,y,z)$ ?



$$\vec{r}_{(q_1 P)} = P - \vec{r}_{q_1} \quad (x, y, z-d) \rightarrow r_{q_1 P} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$\vec{r}_{(q_2 P)} = P - \vec{r}_{q_2} \quad (x, y, z+d) \rightarrow r_{q_2 P} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \vec{j} + \frac{(z-d)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \vec{k} \right]$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \vec{j} + \frac{(z+d)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \vec{k} \right]$$

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \vec{i} + \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \vec{j} \right]$$

$$+ \left[ \left( \frac{(z-d)}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{(z+d)}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \vec{k} \right]$$

Obs! Se as invés de pontos de cargas pontiformes tivermos uma distribuição de cargas (contínua) sobre uma região, a soma se transforma em uma integral:

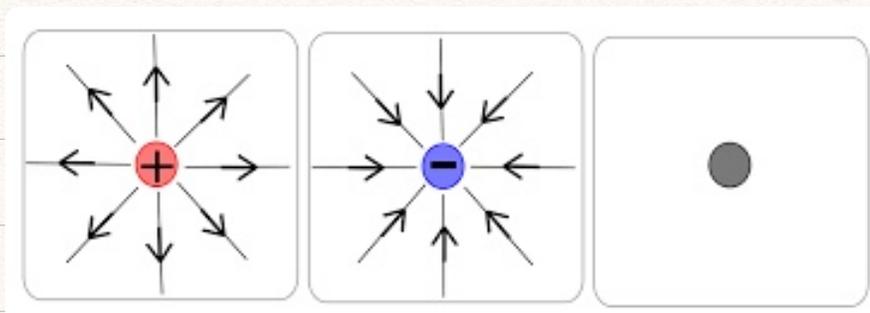
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{r^3} dq$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma ds \\ \rho dv \end{cases}$$

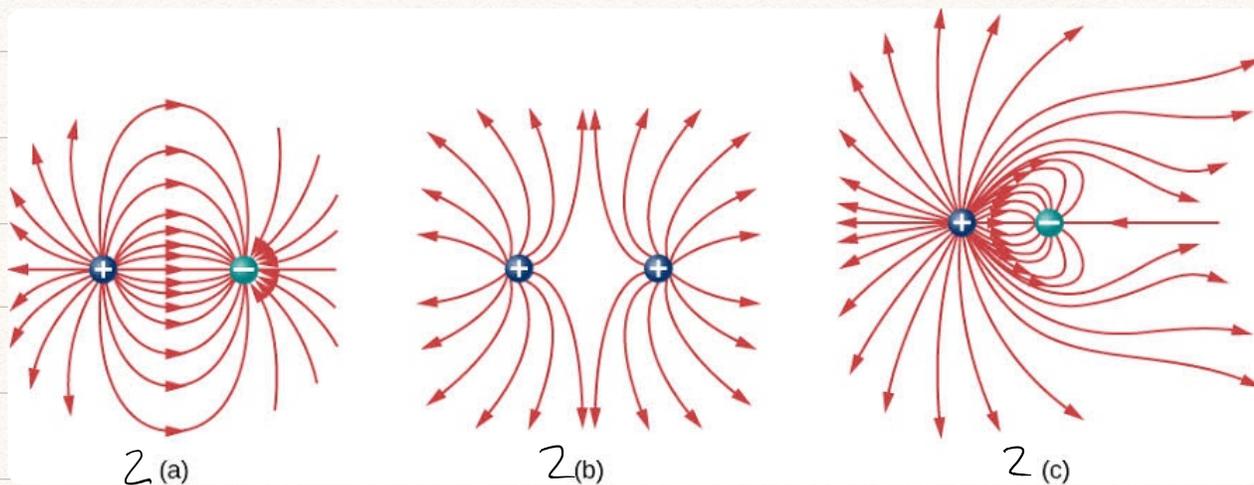
## Linhas de Campo:

Dado uma carga puntiforme  $q$ , sabemos que o campo elétrico gerado por essa carga é:  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$ . Ou seja é um campo análogo ao campo radial, com a diferença que cai com  $\frac{1}{r^2}$ .

Com isso, é possível esboçar o campo gerado por uma partícula sozinha no vácuo e duas partículas juntas.



(1)



(2)

Na figura (1) temos ambas as cargas positivas quanto negativas sozinhas no espaço. Na figura (2) temos a interação de duas cargas, (2a) cargas com mesma intensidade mas sinais opostos (2b) Cargas de mesma intensidade e mesmo sinal, (2c) cargas de sinais opostos mas diferentes intensidades.

O sinal da carga tem relação com o sentido do campo, p/ fora ou p/ dentro. (positivo ou negativo).

A intensidade da carga tem relação com o número de linhas de campo representadas (mais precisamente, com o fluxo do campo).

Nos podemos então definir o fluxo do campo elétrico através de uma superfície  $S$  como sendo:

$$\Phi_E \equiv \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

com uma carga pontiforme  $q$  na origem

Pensando no fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio  $\rho$  (fixo) temos:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} :$$

$\vec{n}$  tem Jacobiano!

Parametrizando a superfície  $\mathcal{C}$  com coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \text{ ou seja, temos a aplicação } (\theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

vetores tangentes a superfície:

$$\vec{X}_\theta = (-r \sin\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \cos\theta, 0)$$

$$\vec{X}_\varphi = (r \cos\theta \cos\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, -r \sin\varphi)$$

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi = (-r^2 \sin^2\varphi \cos\theta) \vec{i} - (r^2 \sin^2\varphi \sin\theta) \vec{j} + (-r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi - r^2 \cos^2\theta \sin\varphi \cos\varphi) \vec{k}$$

$$\text{Onde } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \hat{k} \right]$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\cos\theta \sin\phi}{r^2} \hat{i} + \frac{\sin\theta \sin\phi}{r^2} \hat{j} + \frac{\cos\phi}{r^2} \hat{k} \right]$$

Agora,  $\vec{E} \cdot (\vec{x}_\theta \wedge \vec{x}_\phi)$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \begin{aligned} & -\cos^2\theta \sin^3\phi - \sin^3\phi \sin^2\theta - \sin^2\theta \sin\phi \cos^2\phi - \cos^2\theta \sin\phi \cos^2\phi \\ & -\sin^3\phi - \sin\phi \left( \underbrace{\sin^2\theta \cos^2\phi + \cos^2\theta \cos^2\phi}_{+} \right) \end{aligned} \right]$$

$$-\sin^3\phi - \sin\phi \cos^2\phi \quad \cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi$$

$$-\sin^3\phi - \sin\phi(1 - \sin^2\phi)$$

$$-\cancel{\sin^3\phi} - \sin\phi + \cancel{\sin^3\phi}$$

$$= -\sin\phi$$

$$\Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{2\pi q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \cos\phi \Big|_0^\pi = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_1 \right]$$

$= \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot -2 = -\frac{q}{\epsilon_0}$ ; Foi utilizado a normal errada, o que calcula o fluxo de fora para dentro, ao trocar o sinal

ficará o fluxo de dentro p/ fora  $\Rightarrow$   $\boxed{\text{fluxo} = q/\epsilon_0}$

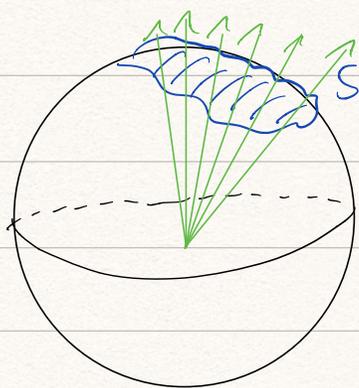
$$\therefore \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A integral na esfera resultou em  $4\pi$ , devido a também a definição de ângulo sólido:

### Ângulo Sólido

S contido na esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

O ângulo sólido determinado por S é a reunião das semi-retas que saem da origem e passam por S.

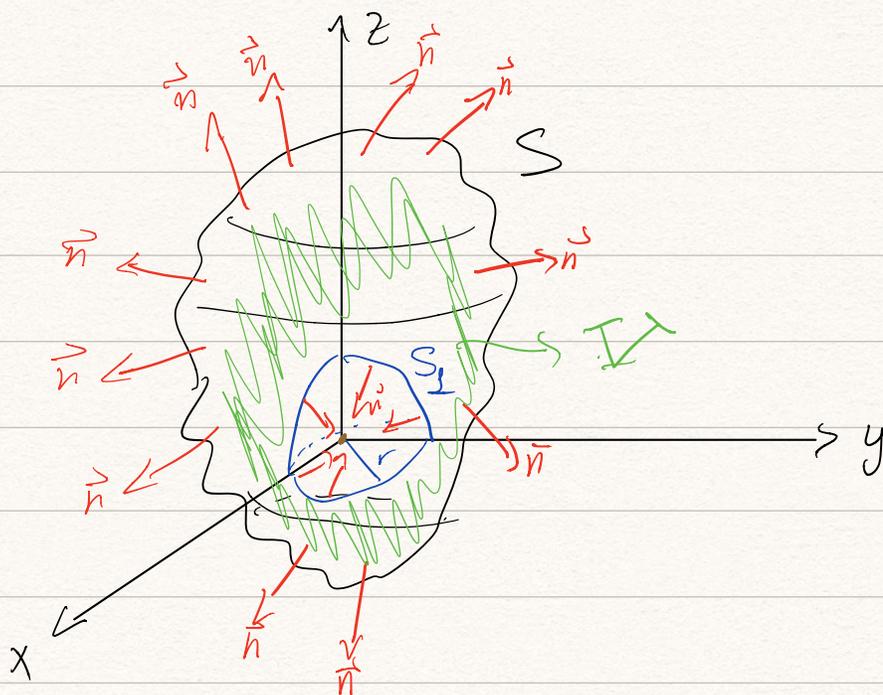


Medida do ângulo sólido ( $\Omega$ )

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} ds$$

( ) No caso da esfera,  $\Omega = 4\pi$

Pensando agora no fluxo do campo elétrico em uma superfície S, fechada e genérica. Sabemos que o campo não é definido na origem. Portanto podemos realizar o seguinte procedimento: definimos uma superfície esférica de um pequeno raio  $r > 0$ , tal que a esfera se encontre no interior de S.



$S$ : Superfície fechada orientada qualquer.

$S_1$ : Esfera de raio  $r > 0$  que engloba a singularidade  $(0,0,0)$

Seja  $V$  a superfície tal que:  $V = S \cup S_1$

Calculamos o fluxo do campo elétrico na região  $V$  utilizando o Teorema de Gauss: (os vetores normais certos estão desenhados acima)

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \iint_V \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \iint_{S \cup S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 ; \text{ Como } S_1 \text{ é uma esfera, temos } \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

(O sinal se deve a normal que aponta no sentido contrário)

$$\Rightarrow \iint_S \vec{E} d\vec{s} - \frac{q}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Logo, temos que o fluxo do campo elétrico de qualquer superfície  $S$  fechada e que englobe a carga, vale  $\frac{q}{\epsilon_0}$ .

Imaginando que dentro dessa superfície há inúmeras de uma carga pontual, temos várias cargas  $q_i$ , pelo princípio de superposição temos:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

A integral de superfície do tipo fluxo fica:

$$\oint \vec{E} d\vec{a} = \sum_{i=1}^n \left( \oint \vec{E}_i d\vec{a} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon_0} q_i = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Pelo Teorema de Gauss temos:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \frac{Q_T}{\epsilon_0} ; \text{ A carga total pode ser reescrita como:}$$

$$Q_T = \int_V \rho \, dv ; \text{ onde } \rho \text{ é a } \underline{\text{densidade de carga}}.$$

Logo, temos:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, dv = \int_V \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \, dv$$

Como isso se estende para qualquer volume, os integrandos devem ser equivalentes:

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

> Lei de Gauss Elétrica - 1ª Lei de Maxwell

Aplicações da Lei de Gauss:

EX-1) Encontre o campo fora de uma esfera de raio  $R$  uniforme o carga total  $q$ .

Esse exercício pode ser abordado com as chamadas Superfícies Gaussianas, Nesse caso, imagine uma superfície esférica com raio  $r > R$ . A lei de Gauss nos diz:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

O que nos ajuda nesse exercício e em outros casos similares, é a simetria do problema. Estamos analisando a situação numa esfera, além disso, o campo elétrico aponta radialmente. Note que essa é a mesma direção do vetor normal  $\vec{n}$  da esfera. Logo:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = |\vec{E}|$$

$$\hookrightarrow |\vec{E}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\theta$$

$$\hookrightarrow \theta = 0 \Rightarrow \cos(0) = 1$$

$$|\vec{n}| = 1 \text{ (versor)}$$

$$\hookrightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S |\vec{E}| d\vec{a} = |\vec{E}| \int_S d\vec{a} = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2$$

$$\text{Como } \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Como o campo elétrico tem direção radial:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

↳ Existem 3 tipos de simetrias possíveis p/ utilizar simetrias gaussianas.

1-) Simetria Esferica

2-) Simetria Axial (Cilíndrica)

3-) Simetria de Plano.

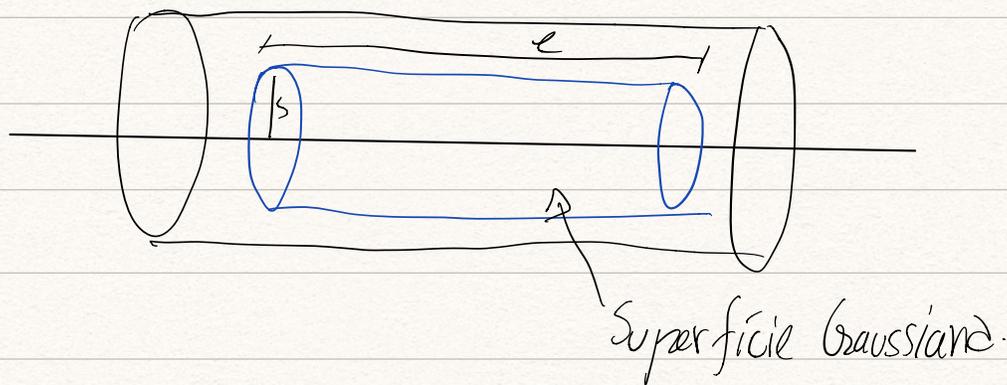
EX-1) Um cilindro com densidade de carga proporcional a distância do eixo:  $\rho = ks$ . Encontre o campo elétrico dentro do cilindro.

Desenhando um cilindro Gaussiano de comprimento  $l$  e raio  $s$ .

Para esta superfície a lei de Gauss nos diz:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} ; \quad Q_T = \int \rho dv = \int (ks') (s' ds' dl dz) = \frac{2}{3} \pi k \epsilon s^3$$

coord cilíndricas



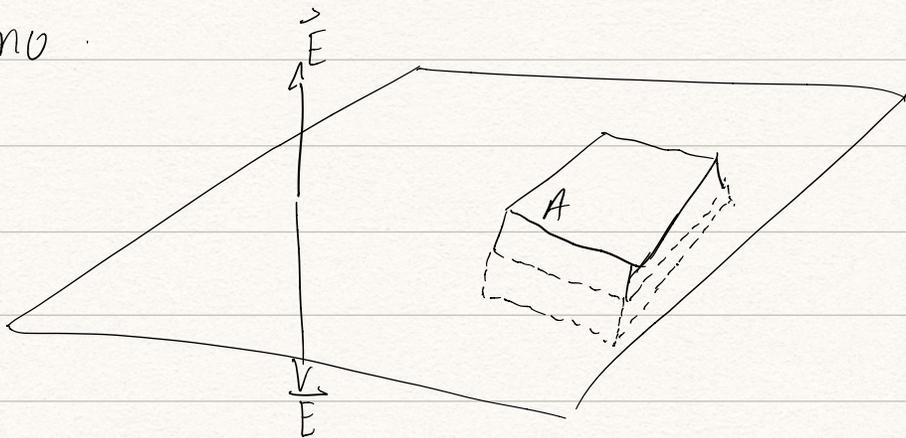
Novamente, devido a simetria radial do campo elétrico, ele aponta p/ a mesma direção que a normal da superfície:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int |\vec{E}| \cdot d\vec{a} = |\vec{E}| \int d\vec{a} = |\vec{E}| 2\pi s l. \text{ Logo temos:}$$

$$|\vec{E}| 2\pi s l = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \pi k \epsilon s^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} k s^2 \hat{s}}$$

EX-1 Um plano infinito possui uma distribuição uniforme superficial de carga  $\sigma$ . Encontre seu campo elétrico.

Pensamos em uma caixa Gaussiana simetricamente imersa no plano.



Aplicando a Lei de Gauss a caixa obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_T ; \quad Q_T = \sigma \cdot A$$

↳ área da tampa

Por simetria,  $\vec{E}$  aponta na mesma direção e sentido que a normal da caixa imersa no plano, logo:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S |\vec{E}| d\vec{a} = |\vec{E}| \int d\vec{a} = \underbrace{|\vec{E}| \cdot 2A}$$

↳ Apenas as tampas superior e inferior acrescentam algo ao fluxo.

↳ Nas tampas laterais, o vetor normal  $\vec{n}$  é perpendicular ao campo, logo  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ .

Portanto temos:

$$2A |\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot A$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

## Potencial Elétrico:

Uma propriedade intrínseca do campo elétrico  $\vec{E}$  é:  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ , portanto o Teorema de Helmholtz nos garante a existência de uma função potencial. Como o rotacional do campo é nulo. Pelo teorema de Stokes temos  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$ . O que leva a independência do caminho na integral de linha. Logo definimos a função:

$$V(\vec{r}) \equiv - \int_{\theta}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$\theta \rightarrow$  ponto de referência (potencial nulo)

A função  $V$  chamamos de Potencial Elétrico:

temos também:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\theta}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e} + \int_{\theta}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{\theta}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e} - \int_{\vec{a}}^{\theta} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

Utilizando o teorema fundamental dos gradientes:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla V) \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

OBS: Uma ressalva deve ser feita a respeito do ponto de referência  $\theta$ ; é uma escolha arbitrária. O mais comum, é que o ponto de referência ~~seja~~ seja ~~colocado~~ colocado no infinito, com isso  $V(\infty) = 0 = V(\theta)$  fazendo com que alguns problemas sejam evitados, a menos que por ex haja uma distribuição infinita de carga.

ii-) mesmo com uma mudança de ponto de referência  $\theta, \theta'$  teremos  $\nabla V' = \nabla V$ .

iii-) Obedece o princípio de superposição:  $V_T = \sum V_i$

Exemplo: Encontre o potencial dentro e fora de uma casca esférica de raio  $R$  com densidade superficial  $\sigma$  constante.

Pela lei de Gauss, o campo fora é:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$ .

i-) Pontos fora da esfera: ( $r > R$ )

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

↳ normalmente, o ponto de observação é colocado no infinito.

↳ Por esse motivo, o potencial elétrico dentro da esfera será não nulo, mesmo com o campo interno sendo nulo.

Como o campo muda quando ( $r < R$ ) a integral do potencial deve ser quebrada em duas integrais diferentes:

$$V(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

↳ dentro da sup. esférica o campo elétrico se anula.

Sabendo agora que o campo elétrico pode ser escrito ~~em função~~ como o gradiente de um potencial escalar:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ; sabemos de resultados anteriores que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Como  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , temos:

i-)  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = 0$

ii-)  $\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla}^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

↳ Equação de Poisson

$\vec{\nabla}^2 \rightarrow$  Laplaciano.

A equação de Poisson nos diz que a partir do potencial é possível obter a distribuição de carga. Entretanto o contrário também é válido:

Já vimos que o potencial de uma carga pontiforme é:  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$

Como sabemos, o potencial obedece o princípio de superposição, logo se tivermos  $n$  cargas pontiformes:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{r_i} \quad \text{analisando o caso de uma distribuição contínua.}$$

Essa soma se torna a integral:  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$ . Em especial se

$dq = \rho d\tau$  → elemento de Volume:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} d\tau'$$

Isso nos permite computar o valor do potencial, sabendo apenas como está organizado a distribuição de carga no espaço, não havendo necessidade do

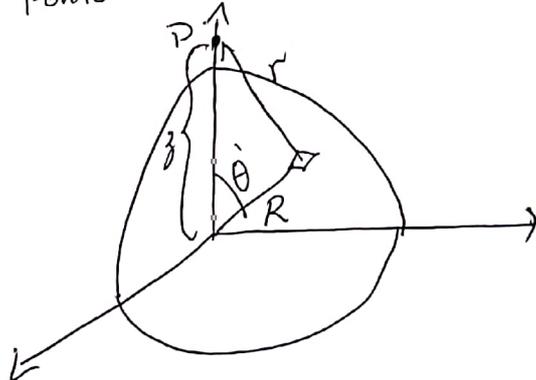
campo  $\vec{E}$ .

OBS! A mesma relação é válida para outras densidades (superficial e linear) de carga.

Exemplo: Encontre o potencial de uma casca esférica de raio  $R$ .

Similar ao último exemplo, porém desta vez realizaremos por:  $V(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma}{r} da'$

Expressando o ponto  $P$  no eixo  $z$  teremos:



$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'$$

O elemento de superfície  $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ , então:

$$4\pi\epsilon_0 V(r) = \sigma \int \frac{R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = 2\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} d\theta'$$

$$\rightarrow \frac{2\pi R\sigma}{z} \left[ \sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]$$

Temos então, para pontos ~~interiores~~ <sup>exteriores</sup> a esfera temos:  $\sqrt{(R-z)^2} = z - R$   
 e pl pontos interiores:  $\sqrt{(R-z)^2} = R - z$ ; então temos:

$$V(z) = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z} \left[ (R+z) - (z-R) \right] = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 z} \quad (\text{fora})$$

$$V(z) = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z} \left[ (R+z) - (R-z) \right] = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{dentro})$$

Podemos ainda trocar  $\sigma$  e deixar tudo em função de  $q$ .

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} & (r \geq R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} & (r \leq R) \end{cases}$$

## Trabalho e Energia Eletrostática.

Uma pergunta que surge neste estudo é a seguinte: qual o trabalho necessário para mover uma carga  $Q$  de um ponto  $\vec{a}$  para um outro ponto  $\vec{b}$ ? Recordemos primeiramente da definição de trabalho:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{e}; \text{ onde } \vec{F} \text{ é a força exercida. No caso da eletrostática,}$$

a força é dada por  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ ; entretanto no ato de mover a carga, essa força realizada deve ser contrária ao campo, logo:  $\vec{F} = -Q\vec{E}$ :

$$W = - \int_a^b Q \vec{E} \cdot d\vec{e} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{e} \Rightarrow \underbrace{W = Q [V(\vec{b}) - V(\vec{a})]}_{\text{onde } V(\vec{b}) - V(\vec{a})}$$

é a diferença de potencial entre os pontos  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Nesse sentido, podemos pensar na diferença de potencial como o trabalho por unidade de carga necessário para mover uma partícula de um ponto a outro ponto.

Obs: No entanto, esse resultado não é genérico, mas sim referente a apenas uma carga puntiforme e não referente a uma coleção de cargas puntiformes ou uma densidade de carga.

zi-) Uma coleção de cargas:

Pensando agora qual o trabalho realizado de juntar uma coleção de cargas uma por uma, vindo do infinito. Note que ao trazer a primeira carga  $q_1$  não é realizado trabalho, visto que não há a existência de um campo elétrico. Ao trazer

Uma carga  $q_2$  teremos:

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{12}} \right); \text{ pl } q_3: W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

pl uma carga  $q_4$  tenemos:

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

logo o trabalho total seria:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{ou podemos somar em todo } i \neq j \text{ e}$$

dividir por 2, visto que o mesmo resultado seria contado duas vezes:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

$\hookrightarrow V(\vec{r}_i)$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i)}$$

Esse é o trabalho realizado para trazer  $n$  cargas  $q_i$  do infinito até uma certa configuração desejada. Em outras palavras é a energia necessária para 'criar' o seu sistema, ou 'destruí-lo'. Também representa a energia 'armazenada' no sistema. A isso damos o nome de Auto Energia, é a energia potencial do sistema.

Para o caso envolvendo uma distribuição de carga  $\rho$  teríamos:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \cdot V \, d\tau. \quad \text{Entretanto } \rho = \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) V \, d\tau$$

utilizando integração por partes temos:  $W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ - \int \vec{E} (\nabla V) \, d\tau + \oint V \cdot \vec{E} \, d\vec{s} \right]$

mas  $\nabla V = -\vec{E} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int E^2 \, d\tau + \oint V \cdot \vec{E} \, d\vec{s} \right]$ . Se por ventura integrássemos em todo o espaço. A contribuição da integral de superfície iria a zero. Sobrando apenas a integral volumétrica.

Logo:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{Space}} E^2 d\tau$$

Este valor entrega o mesmo resultado que o trabalho anterior  $w = \frac{1}{2} \sum q_i \cdot V(r_i)$ . A diferença é uma pequena sutileza que leva a um resultado interessante. No caso anterior, o sistema foi sendo construído aos poucos, o que leva a uma configuração gradativa do campo Elétrico. O resultado nos leva a energia potencial do sistema (Auto energia). No entanto ela pode ser atingida dessa outra maneira onde já consideramos o sistema de interesse como existente e já configurado, com um campo ~~pr~~ estabelecido. A integral acima nos leva que a energia potencial necessária para a construção do sistema está contida no campo elétrico, mas de uma forma diferente, em relação a energia contida no campo descrevemos como uma densidade volumétrica de energia potencial.

Exemplo: Encontre a energia de uma casca esférica de carga total  $q$  e raio  $R$ .

i-) Temos que:  $U = \frac{1}{2} \int \sigma V d\vec{s}$ ; o potencial na superfície da esfera é constante e  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

$$\text{então: } W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma d\vec{s} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}$$

ii-) Indo pela densidade volumétrica de energia no campo elétrico temos: 1-) dentro da esfera  $\vec{E} = 0$ ,  
fora:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \Rightarrow E^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}$ . então:  $W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{fora}} E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2 \cdot (4\pi\epsilon_0)^2} \int_{\text{fora}} \frac{q^2}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}$$

# Força Eletromotriz.

Pensando em um circuito elétrico, que força é responsável pelo andamento da corrente ao longo do circuito? Existem primordialmente duas forças envolvidas, uma força relacionada a fonte, que se mantém confinada dentro de uma certa porção do circuito (a fonte por assim dizer) e uma força eletrostática que através do campo elétrico  $\vec{E}$  direciona os elétrons pelo caminho do fio.

○ que nos leva a seguinte decomposição:

$$\vec{f} = \underbrace{\vec{f}_s}_{\text{fonte}} + \vec{E}$$

Essa força  $\vec{f}_s$  devida a fonte, pode haver diversas origens, desde força eletroquímica da pilha até o campo magnético (variação). Analisando a integral de linha no circuito temos:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_s \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↳ campo eletrostático conservativo

$$\boxed{\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_s \cdot d\vec{l}}$$

↳ Definimos como Força Eletromotriz (fem)

Em uma situação ideal, a força de atrito nas cargas é nula;  $\Rightarrow \vec{E} = -\vec{f}_s$

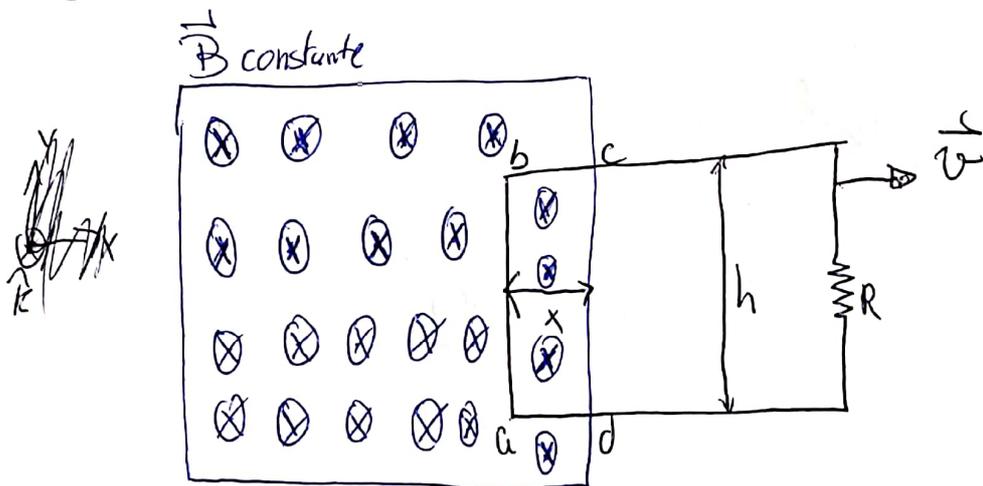
Analisando a diferença de potencial entre os terminais de uma bateria,

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_s \cdot d\vec{l} = \int_a^b f_{sx} dx = \mathcal{E}$$

isso é possível tendo em vista que  $\vec{f}_s$  força da bateria é zero.

Isso nos leva que a função da bateria através de  $\vec{f}_s$  é ~~na~~ manter uma diferença de potencial igual a força eletromotriz. Onde a fem pode ser interpretada como o trabalho realizado por unidade de carga, que irá acarretar na produção de uma corrente elétrica. Diferentemente da diferença de potencial, a mesma depende de um caminho.

Um exemplo muito importante desse processo é quando temos uma corrente gerada por mover um fio por uma região de campo magnético. Imagine a seguinte representação:



Um fio ligado a um resistor  $R$ , com uma parte imersa no campo magnético constante. Esse circuito é puxado para a direita com

velocidade  $\vec{v}$  constante:

A parte do circuito imersa no campo  $\vec{B}$  irá sofrer uma força  $\vec{F}_{mag}$  devido a velocidade  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .  $\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$  pela força

de Lorentz. Os elétrons irão sentir uma força para baixo e isso

irá induzir uma corrente elétrica no circuito na direção contrária

(sentido horário). Logo, temos que a força magnética é a

responsável pela força eletromotriz; onde  $\vec{F}_{mag} \neq 0$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{-e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}{-e} = \underline{vBh}$$

↳ lembrando que se trata da força por unidade de carga.

Podemos definir agora nessa região o fluxo do campo magnético:

$$\Phi \equiv \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad \text{onde } S \text{ é uma superfície que se apoia sobre}$$

o caminho da corrente. Pela regra da mão direita, temos que a normal da superfície adentra o papel  $\otimes$ ; paralelamente a  $\vec{B}$ . (o caminho é perseguido no

sentido da corrente). Logo:  $\Phi = B \int_S d\vec{a}$ ; onde neste caso  $S$  é a <sup>região limitada</sup> ~~área~~

pelos caminhos do circuito. Como não há fluxo magnético  $\Phi$  na região fora do campo:

$$\bar{\Phi} = Bhx.$$

Ao analisarmos o fluxo do campo magnético no tempo; um sinal menor aparecerá pois ao passar do tempo menor é a região imersa no campo e portanto, menor é o fluxo.

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = -Bh \frac{dx}{dt} = -Bh\dot{x} \text{ com isso chegamos a}$$

regra do fluxo por meio de uma demonstração simplificada:

$$\boxed{\mathcal{E} = - \frac{d\bar{\Phi}}{dt}}$$

## Lei de Faraday:

Na realidade, o exemplo detalhado anteriormente, foi um experimento realizado por Faraday. Outrora o mesmo experimento fora realizado, mas dessa vez, a placa de campo fora movida com velocidade  $\dot{x}$ . O mesmo resultado foi observado, uma corrente foi induzida no meio. O mesmo experimento foi realizado novamente, mas dessa vez, fez o campo magnético variar. Novamente uma corrente induzida fora observada. Que o levou a conclusão:

Uma variação no campo magnético induz um campo elétrico.

Analisando o caso em que a placa de campo  $\vec{B}$  se move com velocidade  $\vec{v}$ . Teremos que nesse caso o campo elétrico induzido é o responsável pela força eletromotriz:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{mas } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$\Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$  ;  $\rightarrow$  forma integral.  
utilizando o Teorema de Stokes, chegamos a lei de Faraday na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\rightarrow$  A qualquer momento, quando houver uma variação no fluxo do campo magnético, uma força eletromotriz surge, com um campo e uma corrente elétrica induzida.

$\rightarrow$  Esse campo  $\vec{E}_{ind}$  como surge a partir de  $\vec{B}$  e não de cargas elétricas, ele é um campo não conservativo.

$\rightarrow$  De forma geral representa o mesmo efeito causado pela força de Lorentz, apenas analisado de um outro referencial.

A fim de descobrir o sentido do campo e corrente induzidos, podemos nos utilizar da Lei de Lenz. Ao qual afirma que a natureza 'detesta' uma mudança no fluxo. Logo o campo e corrente aparecem no sentido tal que tente restaurar o fluxo (por mais que isso não aconteça). Com isso podemos perceber a natureza 'inercial' da indução de Faraday.

### Campo Elétrico Induzido.

Para o campo  $\vec{E}$  gerado por uma mudança no fluxo de  $\vec{B}$  temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ e } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{ Similar ao domínio magnetostático.}$$

Logo,  $\vec{E}$  pode ser calculado similarmente a lei de Biot-Savart:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\partial \vec{B} / \partial t) \times \hat{r}}{r^2} d\tau = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^3} d\tau$$

Ou ainda, se a simetria do problema permitir,  $\vec{E}_{ind}$  pode ser encontrado pela forma integral da Lei de Faraday:

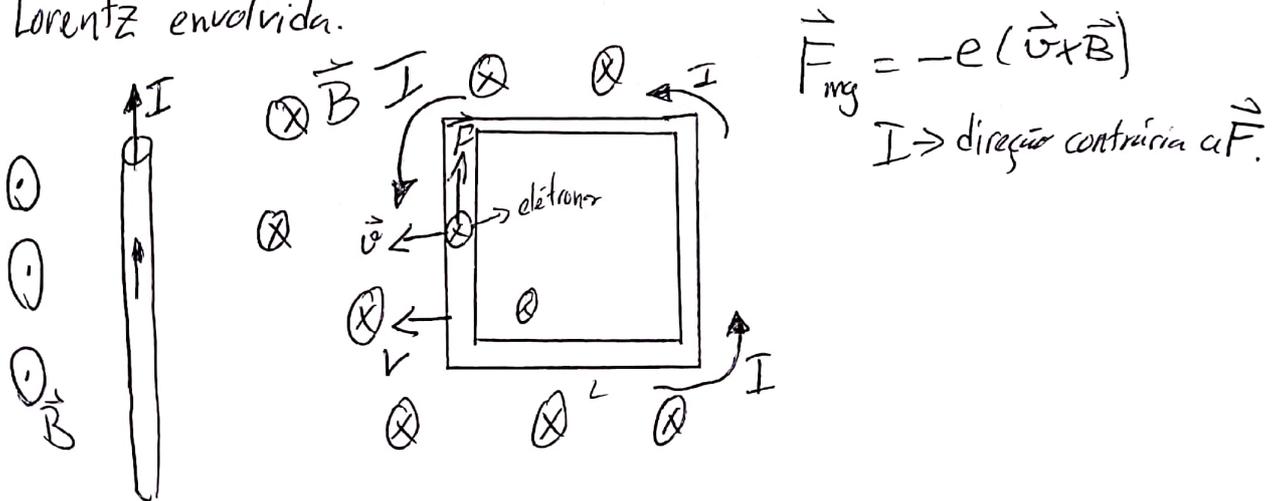
$$\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Agora, com a Lei de Faraday em mãos, podemos analisar alguns problemas cuja abordagem física depende do referencial analisado, nos levando a força de Lorentz, ou a Lei de Faraday.

Exempb: Um sistema é formado por um fio muito longo percorrido por uma corrente  $I$  e uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , coplanar com o fio. O fio e a espira aproximam-se a uma velocidade constante  $v$ , sendo que no instante  $t=0$  a distância entre eles vale  $a$ .

### i-) Referencial do fio:

temos a seguinte situação esquematizada, o fio por ter uma corrente  $I$  produz um campo magnético  $\vec{B}$ . A bobina que se aproxima  $v$  velocidade  $\vec{v}$ , gera uma corrente devido aos portadores de carga da mesma. Devido ao campo  $\vec{B}$ , haverá então uma força de Lorentz envolvida.



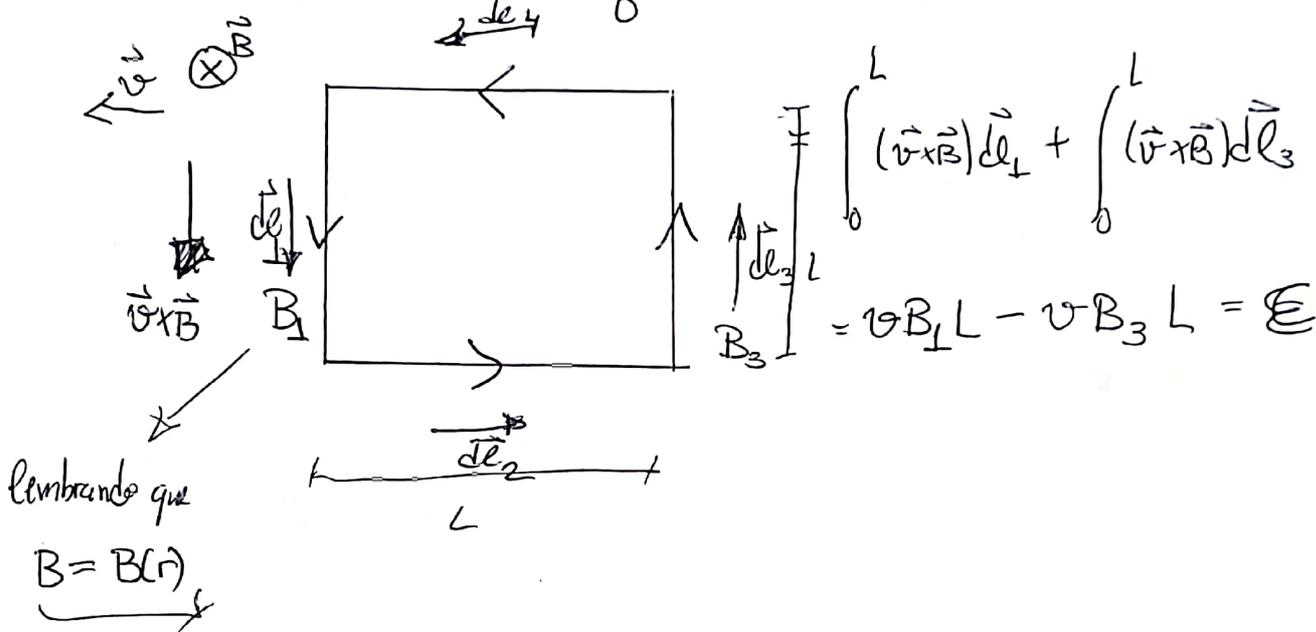
O módulo do campo magnético gerado pelo fio é:  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  (pode ser obtido pela Lei de Ampère)

Temos então, que o ente responsável pela força eletromotriz na espira,

é a força de Lorentz:  $\mathcal{E} = \oint \frac{\vec{F}_{mg}}{q} d\vec{l} = \oint \vec{v} \times \vec{B} d\vec{l}$

Como o caminho fechado, é escolhido como sendo o caminho da corrente ao longo da espira; esquematizando teremos:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}_3 + \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}_4$$



Lembrando que em  $t=0$  a distância entre a espira e o fio é a mesma que a distância  $r_1$  (lado mais a esquerda) e  $r_3$  (lado mais a direita) são:

$$r_1(t) = a - vt ; r_3(t) = a - vt + L$$

Logo;

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi(a-vt)} ; B_3 = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi(a-vt+L)}$$

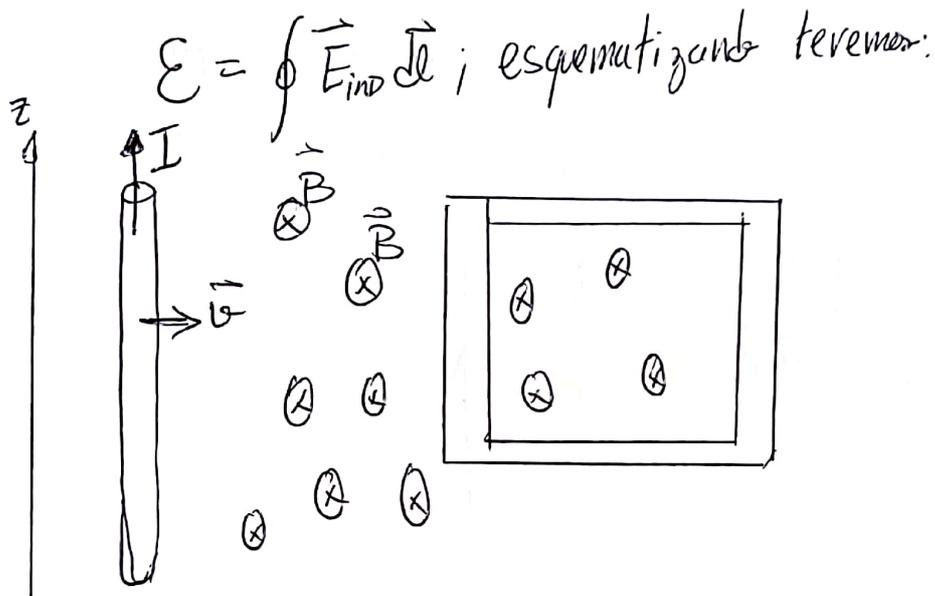
Na espira, devido a fem teremos pela Lei de Ohm:  $\mathcal{E} = R \cdot I_{ind}$

$$\Rightarrow I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} ; \mathcal{E} = vB_1L - vB_3L \Rightarrow I_{ind} = \frac{vL}{R} (B_1 - B_3)$$

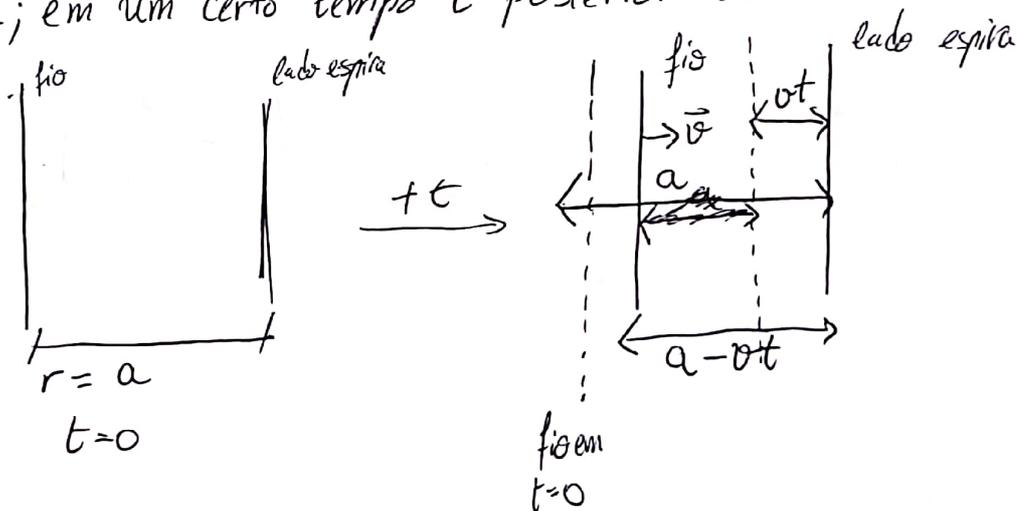
$$\Rightarrow I_{ind} = \frac{vL}{R} \left[ \frac{\mu_0 I_f}{2\pi(a-vt)} - \frac{\mu_0 I_f}{2\pi(a-vt+L)} \right] = \frac{vL\mu_0 I_f}{2\pi R} \left( \frac{1}{a-vt} - \frac{1}{a-vt+L} \right)$$

iii) Referencial da Espira:

Neste referencial, a corrente é devido ao campo elétrico induzido na espira, pela variação temporal do campo magnético. Logo a força eletromotriz será dada por:



$B$  depende univocamente de  $r$ ;  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ; no entanto, nesse caso  $r$  irá variar com o tempo: Quando  $t=0$  o fio está a distância  $a$  da espira; em um certo tempo  $t$  posterior teremos:



logo teremos:  $r(t) = a - vt$  (em relação ao lado ~~esquerdo~~ <sup>esquerdo</sup> da espira)

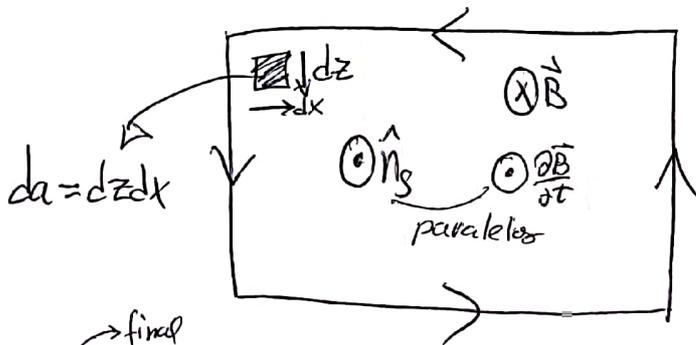
em relação a um ponto genérico a distância  $x$  temos:  $r(t) = x - vt$

O que nos leva a:  $B(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-vt)}$

Por meio da Lei de Faraday temos:  $\mathcal{E} = \oint_c \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{e} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi (x-vt)^2}$$

O caminho  $c$  novamente é o caminho da corrente na espira já utilizado anteriormente; a superfície  $S$  é aquela dentro do caminho  $c$ :



$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \int_a^{a+L} \int_0^L - \frac{\mu_0 I v}{2\pi (x-vt)^2} dz dx = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I \cdot v L}{2\pi (x-vt)^2} dx = - \frac{\mu_0 I \cdot v L}{2\pi (x-vt)} \Big|_a^{a+L}$$

↳ distância  
x inicial

$$= - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot v L \left( \frac{1}{a+L-vt} - \frac{1}{a-vt} \right) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v L}{2\pi} \left( \frac{1}{a-vt} + \frac{1}{a-vt+L} \right)$$

Pela lei de Ohm temos:  $\mathcal{E} = R I_{ind} \Rightarrow I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\Rightarrow I_{ind} = \frac{\mu_0 I v L}{2\pi R} \left( \frac{1}{a-vt} + \frac{1}{a-vt+L} \right)$$

~ mesma resposta em ambas referências

Exemplo: Uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , atravessa uma região também quadrada, de lado  $A > L$ , onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme e perpendicular ao plano.

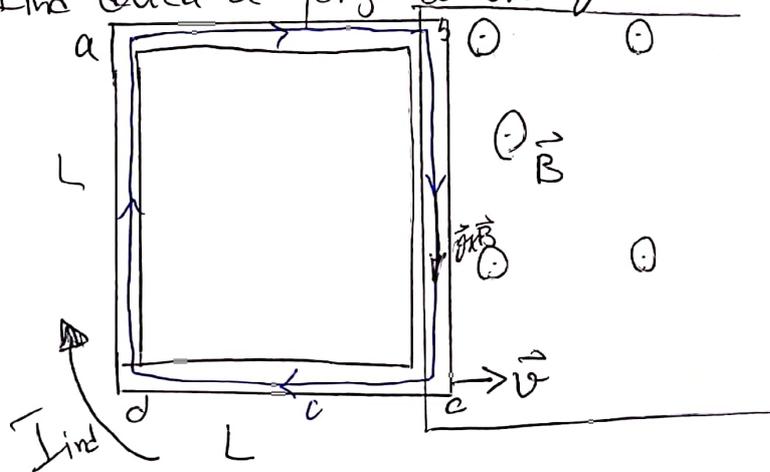
Referencial do laboratório:

Devemos considerar, diversas situações:

i-) Espira fora do campo:  $\vec{I}_{ind} = 0$

ii-) Espira parcialmente no campo:

$\vec{I}_{ind}$  devido a força de Lorentz:



Força Eletromotriz devido a força de Lorentz:  $\mathcal{E} = \oint_c \frac{\vec{F}_{mag}}{q} d\vec{l} = \oint_c \vec{v} \times \vec{B} d\vec{l}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \Rightarrow \int_0^L v B dl = vBL$$

$\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$        $\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$        $\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$        $\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$

Pela Lei de Ohm temos:  $\mathcal{E} = R \vec{I}_{ind} \Leftrightarrow \vec{I}_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{\vec{I}_{ind} = \frac{vBL}{R}}$

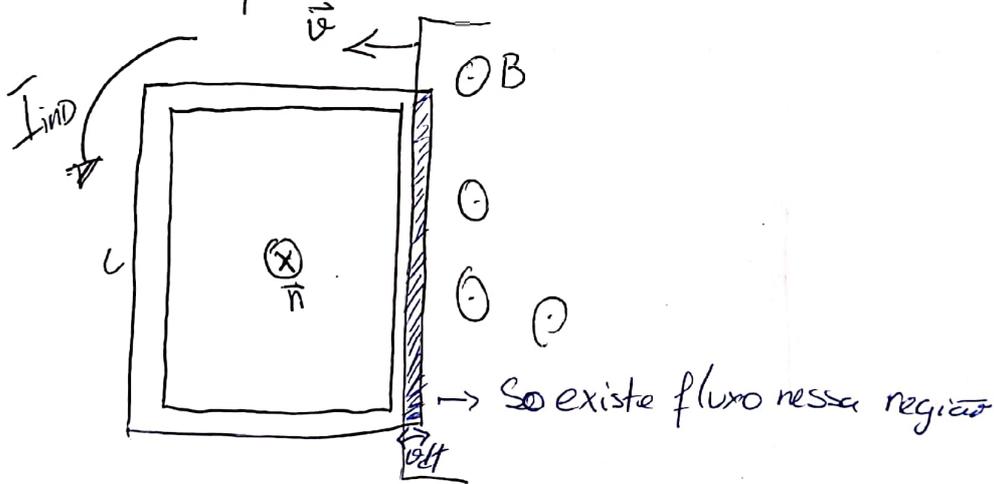
iii-) Espira totalmente imersa: Efeito Hall

iv-) Espira saindo: analogamente a entrando.

## Referencial da Espira:

A placa cruza a espira c/ velocidade  $\vec{v}$ . Isso causa ~~uma~~ uma variação no campo magnético, que irá gerar uma corrente pela lei de Faraday:  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$   
 $\rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{d\vec{B}}{dt}$  (não existem outras dependências no campo).

Se no  $t=0$  instante em que as placas se tangenciam teremos em um instante  $t$  posterior:



$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{t} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad \hat{n} \parallel \vec{a} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad c \rightarrow \text{mesmo caminho anterior}$$

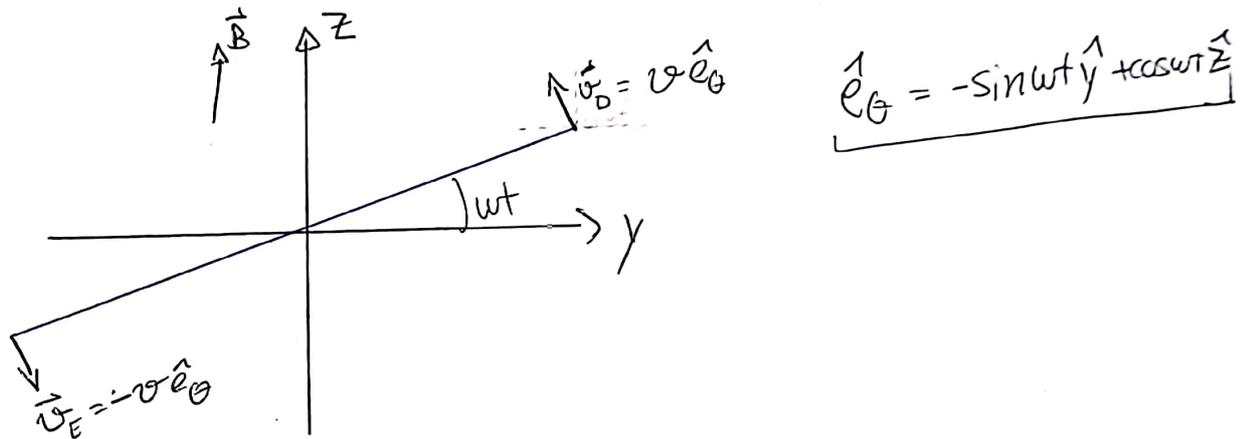
$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \int_0^L \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \cdot dz \Rightarrow \mathcal{E} = vL \int d\vec{B} = vBL$$

Pela Lei de Ohm temos:  $\mathcal{E} = RI_{ind} \Leftrightarrow I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow$

$$I_{ind} = \frac{vBL}{R}$$

Exemplo: Uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , gira com velocidade angular  $\omega$  constante, em presença de um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{k}$ .

Referencial do laboratório:

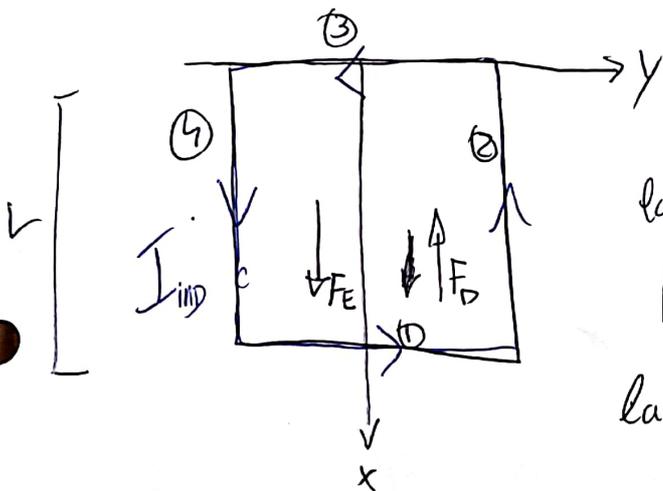


temos também que  $v = \omega R = \frac{\omega L}{2}$ .

$$\vec{v}_D = -\frac{\omega L}{2} \sin(\omega t) \hat{y} + \frac{\omega L}{2} \cos(\omega t) \hat{z} \rightarrow \vec{f}_D = -e \frac{\omega L}{2} B (-\sin(\omega t)) \hat{x}$$

$$\vec{v}_E = \frac{\omega L}{2} \sin(\omega t) \hat{y} - \frac{\omega L}{2} \cos(\omega t) \hat{z} \rightarrow \vec{f}_E = -e \frac{\omega L}{2} B \sin(\omega t) \hat{x}$$

$$\mathcal{E} = \oint_c \frac{\vec{f}}{(-e)} d\vec{r} = 2 \left[ \frac{\omega L^2 B \sin(\omega t)}{2} \right] = \omega L^2 B \sin(\omega t)$$



lados ① e ③ não contribuem por

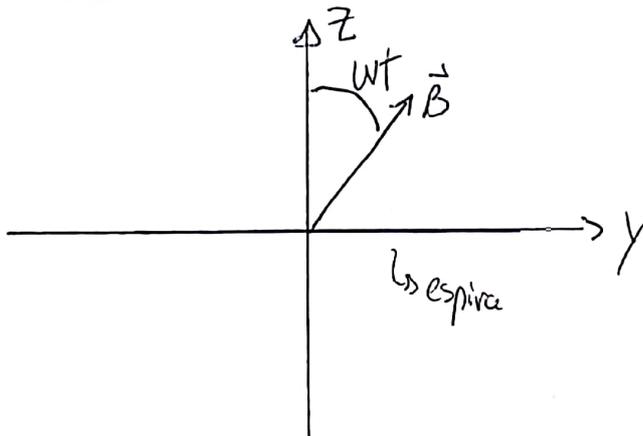
$$\int_{1,3} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$$

lados ② e ④ irão contribuir igualmente

Devemos lembrar que pela lei de Ohm:  $\mathcal{E} = R I_{\text{ind}}$

$$\Rightarrow I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I_{\text{ind}} = \frac{\omega L^2 B \sin(\omega t)}{R}$$

Referencial da Espira: (n\u00e3o inercial)  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$



$$\vec{B}(t) = B \sin(\omega t) \hat{y} + B \cos(\omega t) \hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B \omega (\cos(\omega t) \hat{y} - \sin(\omega t) \hat{z})$$

pela Lei de Faraday:  $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds$ ; onde  $C$  \u00e9 o mesmo caminho que antes e logo  $S$  \u00e9 a \u00e1rea da espira; pela regra da m\u00e3o direita temos  $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \mathcal{E} = - \iint_0^L \int_0^L -B \omega \sin(\omega t) dy dx$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = B \omega \sin(\omega t) \int_0^L \int_0^L dx dy \Rightarrow \mathcal{E} = B L^2 \omega \sin(\omega t) \text{ e pela lei de Ohm:}$$

$$\mathcal{E} = R I_{\text{ind}} \Rightarrow I_{\text{ind}} = \frac{B L^2 \omega \sin(\omega t)}{R}$$

Notemos que o girar da espira no  $\vec{B}$  gera uma corrente alternada.

## ● Indutância:

Pensemos agora em um sistema composto por uma bateria e uma bobina, com densidade de espiras  $n$ , raio  $a$  e altura  $b$ .



● Ao ligar o circuito, a corrente irá aumentar gradativamente até se estabilizar, assumindo um valor fixo, o que nos leva em primeira instância em uma corrente que varia no tempo;  $I = I(t)$ . Devida a essa corrente variável, um campo magnético variável surge na bobina.

É como  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  fem no sistema. Analisando o ~~bobina~~ solenoide

temos:   $\mathcal{E} = \oint_c \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{e} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds$ . Tomemos como caminho  $c$  uma circunferência de fio e superfície o disco.

Sabe-se que o campo dentro do solenoide vale  $B = \mu_0 n I$  e o mesmo é paralelo a normal da superfície. temos então;  $\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0 n \frac{dI}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \iint_s \mu_0 n \frac{dI}{dt} ds = - \mu_0 n \frac{dI}{dt} \iint_s dx = - \mu_0 n \frac{dI}{dt} \cdot \pi a^2$$
 correspondente

● a uma espira. Se multiplicarmos o resultado pelo número de espiras  $N$  obteremos a força eletromotriz do solenoide, no entanto:  $\underline{N = n b}$

Logo:

$$\mathcal{E} = - \underbrace{\mu_0 n^2 \pi a^2 b}_L \frac{dI}{dt} \text{ a este fator proporcional}$$

a  $\frac{dI}{dt}$ , note que se trata de uma propriedade puramente geométrica

A ele ~~o~~ definiremos como Indutância (L) relacionado a inércia do sistema a mudança de corrente. Quanto maior a indutância, mais difícil é de alterar a corrente. Logo, a relação pode

ser reescrita como:

$$\boxed{\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}}$$

Com isso, nos podemos encontrar a corrente em função do tempo, logo quando o circuito é ligado e a mesma varia até se estabilizar. Com a condição inicial que  $I(0) = 0$ . A fem encontrada, ~~o~~ esta relacionada ao solenóide. Lembremos que também existe a fem da ~~da~~ bateria  $\mathcal{E}_0$  (desprezando a resistência interna).

$$\text{Temos pela Lei de Ohm: } \mathcal{E}_T = RI(t) \Rightarrow \mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = RI$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI \rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI - \mathcal{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I - \frac{\mathcal{E}_0}{L} = 0 \right|$$

- Temos que a solução geral é dada pela soma de uma solução particular, com a solução homogênea.

$$\frac{d\bar{I}_h}{dt} + \frac{R}{L}\bar{I}_h = 0 \Rightarrow \underline{I_h(t) = A e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Procurando uma solução particular temos:

- $\frac{d\bar{I}_p}{dt} + \frac{R}{L}\bar{I}_p = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$  ; Seja  $I_p(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$   
 $\frac{d\bar{I}_p}{dt} = 0$

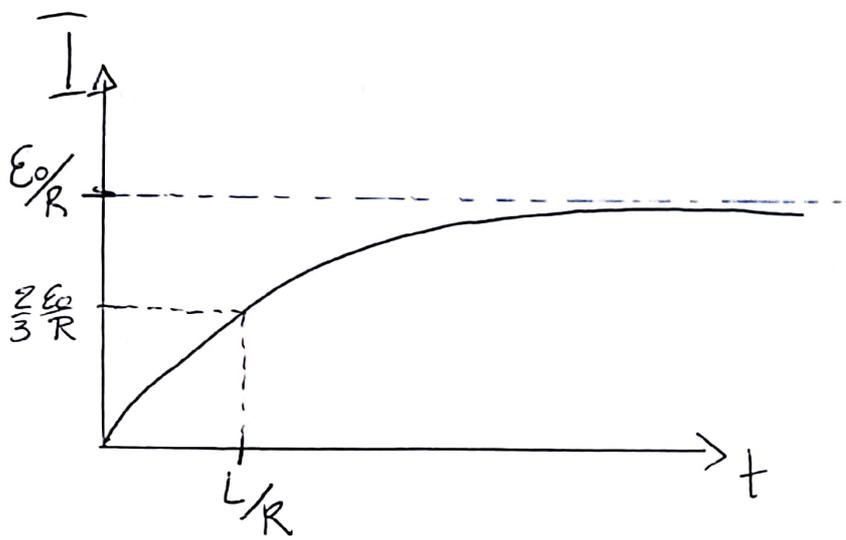
$$\Rightarrow 0 + \frac{R}{L} \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \Rightarrow \underline{\frac{\mathcal{E}_0}{L} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}}$$

Logo:  $I(t) = I_p(t) + I_h(t)$

- $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}$  sabendo que  $I(0) = 0$

$$0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right]}$$



Note que a medida que  $t \rightarrow \infty$ ;  $I \rightarrow \frac{E_0}{R}$  se estabilizando, esse é o Resultado obtido pela simples aplicação da lei de Ohm.

A fem da bobina tende a sumir e medida que a corrente tende a perder sua dependência temporal e praticamente estabilizando-se em  $\frac{E_0}{R}$ .

Uma definição: a constante  $\boxed{\frac{L}{R} \equiv \tau}$  é o que chamamos

de constante de tempo. Ela nos diz quanto tempo leva p/ a corrente atingir uma fração substancial  $(\approx \frac{2}{3} \frac{E_0}{R})$  ↳ valor final.

Na prática,  $\tau$  é da ordem de  $10^{-3}$  segundos.

Ao ligar o circuito, os campos realizam  $W$  sobre as cargas ( $e^-$ )

Também devemos levar em consideração a energia dissipada por efeito

Joule, nos resistores.

- Podemos querer pensar agora em questões de energia. Pois para fazer com que a corrente flua no circuito é necessário uma certa energia. É uma energia contrária a força eletromotriz fazendo com que a corrente flua. Que seria de um potencial  $-\mathcal{E}$  (pois quem realiza o trabalho é você e não a fem). Lembrando que a potência é dada por:  $P = V \cdot I = \frac{dW}{dt}$  temos:

$$P = -\mathcal{E}I = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = L \frac{dI}{dt} I$$

$$\Rightarrow \int \frac{dW}{dt} dt = \int L I \frac{dI}{dt} dt \Rightarrow W = \frac{L I^2}{2}$$

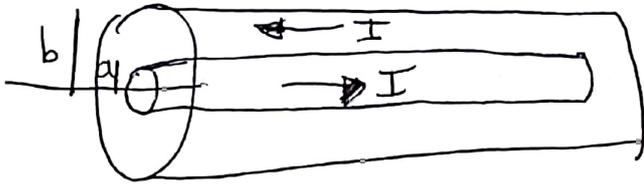
- Relembrando das discussões de campo elétrico, podemos ter também a densidade volumétrica de energia do sistema, que nesse caso permanece armazenada no campo magnético.

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{space}} B^2 d\tau$$

- Onde  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$  (densidade de energia volumétrica).

Exemplo: Um longo cabo coaxial carrega uma corrente  $I$ .

Encontre a energia magnética estocada em uma seção de comprimento  $\ell$ .



De acordo com a lei de Ampere o campo entre os cilindros é:

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$  e fora é nulo. Logo, a energia por unidade de

volume é:  $\frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$ . A energia numa casca

cilíndrica de comprimento  $\ell$  e raio  $r$  e espessura  $dr$  é:

$\left( \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \right) 2\pi \ell r dr = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \left( \frac{dr}{r} \right)$ . Logo, a energia total

armazenada será:  $W = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \cdot \frac{dr}{r} \Rightarrow W = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .

Analisando a outra expressão para  $w$ ;  $w = \frac{1}{2} L I^2$ ; o que nos leva a um método diferente de obter a indutância. Fatorando  $\frac{I^2}{2}$  de  $w$  chegamos que:

$$L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

# Equações de Maxwell:

Até agora, as equações de Maxwell possuem a forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Note que se tirarmos o Divergente de  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$

$$\text{teremos: } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$$

como esperado, pois o divergente de um rotacional

Sempre é nulo.

Se fizermos o mesmo com  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0 \text{ (para correntes não estacionárias).}$$

Logo nos deparamos com um problema na Lei de Ampere, que futuramente foi consertado por Maxwell. Analisando a equação da continuidade e aplicamos a Lei de Gauss teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ e combinando } \epsilon_0$$

Consertamos o  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  da Lei de Ampere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Versão corrigida por Maxwell da Lei de Ampere.

No entanto, a adição do último termo não muda nada em termos da magnetostática. Entretanto o termo ~~tem~~ é de muita importância quando se estuda propagação de ondas eletromagnéticas.

Além disso, vale resaltar que esse termo demonstra uma certa reciprocidade em relação a lei de Faraday. Uma variação no campo elétrico induz um campo magnético. A esse termo

extra Maxwell o chamamos de Corrente de Deslocamento

$$\vec{J}_D \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Chegando então as Leis de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## Elementos de um circuito:

→ Resistores (R): 

↳ dissipam energia eletromagnética por meio de efeito Joule (calor).

→ Capacitores (C): 

↳ armazenam energia na forma de campo elétrico

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}$$

C → capacitância, grandeza geométrica.

→ Indutores (L): 

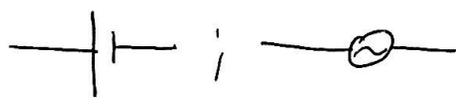
↳ armazenam energia na forma de campo magnético.

$$U_L = \frac{LI^2}{2}$$

→ Também temos a ideia de uma Força Eletromotriz (fem): que pode ser entendida como uma força por unidade de carga.

$$\mathcal{E} = \int_a^b \frac{\vec{E}}{q} \cdot d\vec{e}$$

→ no caso em que o campo é produzido por cargas em repouso, a fem é a própria diferença de potencial.

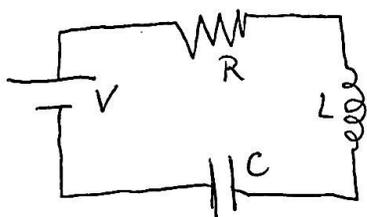
~> Fontes de Tensão: ( $\mathcal{E}$ ): 

↳ transformam outras fontes de energia, em energia eletromagnética.

forecem uma potência ao circuito dada por:  $\mathcal{E} \cdot I = P_i$ .

### Circuito RLC:

↳ Circuito simples formado por um resistor, indutor, capacitor, todos ligados em série:



A fim de estudar e entender seu funcionamento, podemos analisar como as cargas de uma das placas do capacitor varia ao longo do tempo, para isso, podemos nos usufruir do princípio de conservação de energia. A potência total fornecida ao circuito deve ser a mesma que as potências individuais, armazenadas e dissipadas no circuito.

$$P_V = P_R + P_C + P_L$$

$$V \cdot I = RI^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}}$$

~> E.D.O para um sistema de tensão contínua.

A E.D.O assemelha-se muito a E.D.O do oscilador harmônico (matematicamente, é a mesma). É fácil perceber que uma das soluções particulares é  $q(t) = CV$ , basta procurar uma função da mesma classe funcional que a função inhomogênea, nesse caso uma constante. Assim como no oscilador harmônico, iremos obter 3 tipos de solução:  $\rightarrow$  da parte homogênea

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$\Downarrow$

$$L \lambda^2 + R \lambda + \frac{1}{C} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$\Rightarrow$   $\lambda = \frac{-\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2}$ ; obviamente, os tipos de solução vão

depender univocamente do discriminante ( $\Delta$ ) da equação:  $\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$

- $\Delta > 0 \rightarrow R^2 > \frac{4L}{C}$

- $\Delta < 0 \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C}$

- $\Delta = 0 \rightarrow R^2 = \frac{4L}{C}$

$$\boxed{1^{\circ} \text{ caso: } \Delta > 0 \rightarrow R^2 > \frac{4L}{C}}$$

Como  $\Delta > 0$ ,  $\exists \lambda_1$  e  $\lambda_2$  dados por:  $\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} = \beta$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} = \gamma$$

logo;  $q(t) = A e^{\beta t} + B e^{\gamma t}$ , afim de entender a física desse caso, vamos determinar as constantes para a situação na qual o circuito acaba de ser ligado e a placa do capacitor possui uma pequena carga  $q_0$ ; logo:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = q_0 - \frac{q_0 \beta}{\gamma - \beta}; \quad B = \frac{q_0 \beta}{\gamma - \beta}$$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{q_0 \beta}{\gamma - \beta} \left[ e^{\gamma t} + e^{\beta t} \left( \frac{\gamma - \beta}{\beta} - 1 \right) \right]$$



A carga na placa cai exponencialmente devido a resistência do sistema ser muito alta.

→ Sistema Superamortecido

$$\boxed{2^{\circ} \text{ caso: } \Delta < 0 \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C}}$$

↳ Circuito é predominantemente conservativo, pois os fatores relacionados a conservação são maiores que os fatores relacionados a dissipação. O domínio de  $\Delta < 0$  nos leva a soluções imaginárias: podemos reescrever como:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{-1 \left( \frac{4L}{C} - R^2 \right)} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{R}{2L}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}}_{\nu}$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\nu$ ; logo nossa solução tem a cara:

$$q(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{(-\alpha + i\nu)t} + B e^{(-\alpha - i\nu)t}$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\alpha t} \left[ A e^{i\nu t} + B e^{-i\nu t} \right] \quad \text{Solução geral do sistema}$$

No entanto, carga elétrica é uma grandeza observável, portanto real.

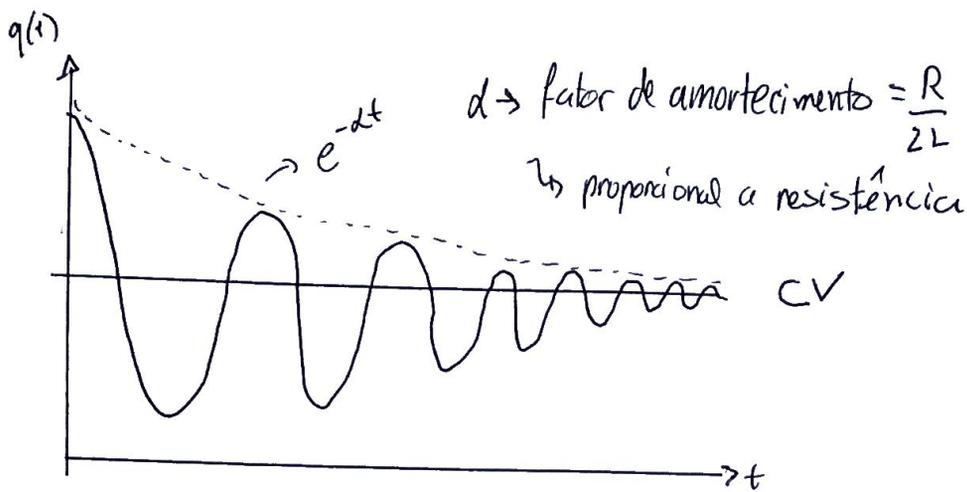
Logo, isso respeita a condição  $q = q^*$ ; disso temos  $A = B^* \Leftrightarrow B = A^*$

Escrevendo agora  $A \in \mathbb{C}$  na forma polar:  $A = |A| e^{-i\theta}$  e voltando a  $q(t)$

obtemos:  $q(t) = f e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta)$ ;  $f = 2|A|$ ; logo:

$$\boxed{q(t) = f e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta) + CV}$$

↳ um sistema Amortecido devido a função oscilante  $\cos$ ; com uma frequência  $\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  mas tende a CV devido do termo  $e^{-\alpha t}$



$\hookrightarrow$  Amortecimento Sub Crítico

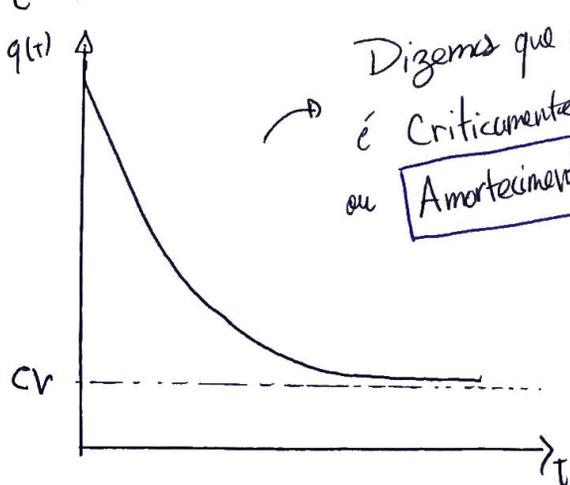
~~Amortecimento Crítico~~

3º Caso:  $R^2 = \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta = 0$

$\hookrightarrow$  Quando  $\Delta = 0$  temos que a solução geral será:

$q(t) = CV + (A + Bt)e^{-dt}$  ;  $d = \frac{R}{2L}$

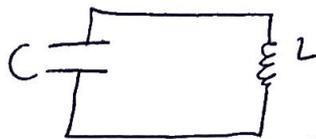
$\hookrightarrow$  Nesse caso, a carga na placa não oscila e decresce abruptamente até CV a medida que  $t \rightarrow \infty$ .



Dizemos que o sistema é Criticamente Amortecido ou Amortecimento Crítico

Circuito LC: pensando agora num circuito formado apenas

por um capacitor e um indutor



Pela ausência do resistor (considerando um sistema ideal). E pensando que o capacitor já possuísse alguma certa carga, temos então que essa energia inicial do sistema se conserva. Montando a E.D.O do circuito:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0; \text{ diferenciando no tempo, chegamos a:}$$

$$\boxed{\frac{d^2 I}{dt^2} + \nu^2 I = 0}$$

;  $\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  no frequência angular de oscilação livre.

Já é sabido que a solução é do tipo:

$$I(t) = A \cos(\nu t + \varphi)$$

amplitude real

fase inicial

; chegamos então a  $Q(t)$  da placa do capacitor:

notemos que corrente e carga diferem em  $\frac{\pi}{2}$  em sua fase.

$$Q(t) = \frac{A}{\nu} \sin(\nu t + \varphi)$$

Vamos analisar agora as energias presentes no capacitor e no indutor, para algum instante de tempo genérico:

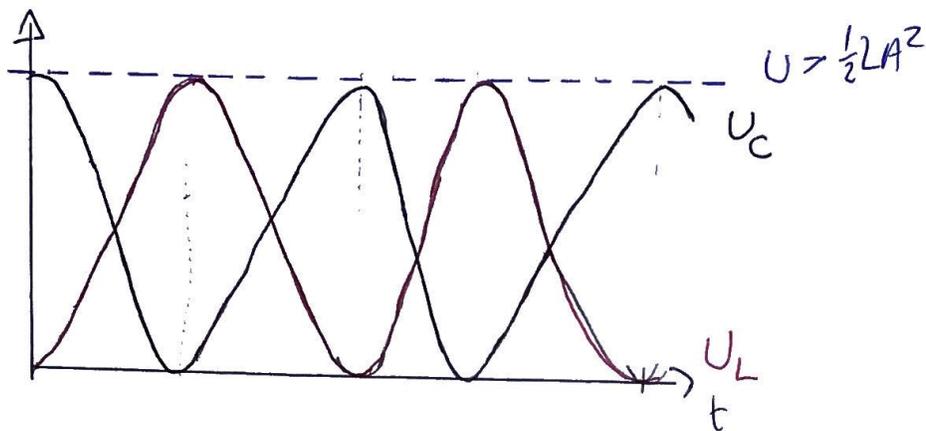
$$\leadsto U_C = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{A^2}{\nu^2} \sin^2(\nu t + \varphi) \cdot \frac{1}{2C} = \frac{1}{2} L A^2 \sin^2(\nu t + \varphi)$$

$$\leadsto U_L = \frac{L I^2(t)}{2} = \frac{L}{2} A^2 \cos^2(\nu t + \varphi)$$

energias  $\varphi$  diferença de fase de  $\frac{\pi}{2}$

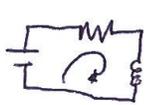
analisando a energia total:

$$U = U_L + U_C = \frac{1}{2} LA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} LA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} LA^2 ; \text{ constante!}$$



observação: A chave aberta no circuito pode ter um funcionamento entendido como um segundo capacitor  $c'$ , devido ao acúmulo de cargas nos pontos da chave tal que geraria um campo elétrico que somado com o campo elétrico do capacitor, produz uma corrente total nula:



Circuito RL: Montando agora um novo circuito apenas com um resistor e um indutor, ~~temos~~ a bateria  temos a seguinte E.D.O:

$$\left. L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = V \right\} ; \text{ Nesse caso } Q(t) \text{ deixa de}$$

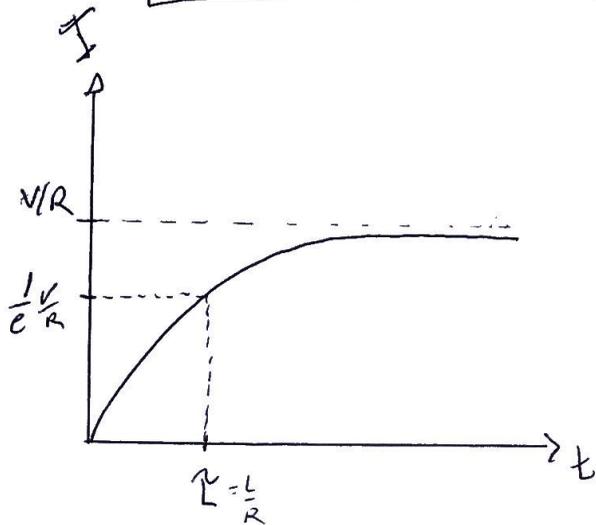
possuir um significado físico por não há um capacitor no circuito. Portanto expressamos a física por meio de  $I \left( \frac{dQ}{dt} \right) \leadsto \left. L \frac{dI}{dt} + RI = V \right\} ; \text{ cuja solução é:}$

$$I(t) = \frac{V}{R} + A e^{-\alpha t} ; \alpha = \frac{R}{L}$$

Pensando num circuito RL cuja chave acaba de ser ligada, temos  $I(0) = 0 \Rightarrow A = -V/R$ . Logo nossa solução assume a forma:

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

constante de tempo  $\frac{L}{R}$



→ Crescimento assintótico  
 → Quanto maior a indutância, mais tempo leva para a corrente se estabiliza →  $L$  é uma inércia referente a mudança da corrente no sistema.

Analisando agora as potências envolvidas no sistema:

↳ potência da fonte:

$$P_V = I \cdot V = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

↳ dissipada no resistor

$$P_R = I^2 R = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2$$

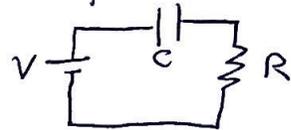
↳ Energia armazenada no indutor:  $U_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{LV^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2$

↳ potência no indutor:  $P_L = \frac{dU_L}{dt} = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) e^{-\frac{R}{L}t}$ ; A medida que  $t \rightarrow \infty$

↳  $P_L \rightarrow 0$ ;  $P_R \rightarrow P_V \Rightarrow P_R = P_V$  (p/ tempo grandes). Logo, toda energia fornecida pela fonte, acaba sendo dissipada no resistor por efeito Joule (calor).

Circuito RC: pensando agora num circuito formado

por um resistor, capacitor e bateria, a E.D.O será:



$$\boxed{R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V} \quad ; \text{ cuja solução é:}$$

$$\boxed{Q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} + VC}$$

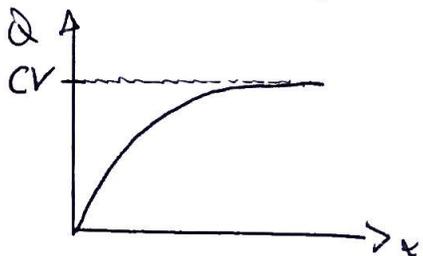
$\hookrightarrow I(t) = \frac{-A}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ ; pensando num sistema onde o chuveiro acabou de ser fechado,  $Q(0) = 0 \Rightarrow A = -CV$   
 $\hookrightarrow$  sem carga inicial no capacitor.

logo,  $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$

$\tau = RC$   
 $\hookrightarrow$  constante de tempo

$\hookrightarrow I(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$

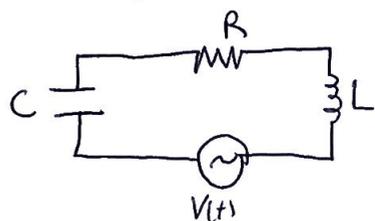
$\hookrightarrow$  Circuito RC pode ser entendido como um RLC com ~~indutância~~ indutância praticamente nula. A expressão da corrente nos mostra que o quão menor a indutância  $L$  de um sistema, mais abrupta/rápida será a passagem da corrente de uma fase transitente temporal para uma fase estacionária constante ( $t \rightarrow \infty$ ). Note que o capacitor irá carregar até  $Q = CV$ , nisso, a corrente do circuito irá para zero.



## Corrente Alternada:

Quando tratamos de corrente alternada, a tensão fornecida ao sistema que antes era constante, agora irá variar com o tempo.

Pensando novamente no circuito RLC mas agora  $V = V_0 \cos(\omega t)$



$$\text{E.D.O.: } \boxed{L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t}$$

Sabe-se que a solução é a soma da solução homogênea e uma particular.

No entanto,  $Q_{\text{homogênea}} \propto e^{-\frac{tR}{2L}}$ , a medida que  $t \rightarrow \infty$  a solução

homogênea vai perdendo força, tratando-se assim de uma solução transiente.

Enquanto a solução particular representa a solução estacionária da E.D.O.

$\Rightarrow$  Sistemas como esse são conhecidos por oscilações forçadas, pois o circuito irá oscilar com a frequência da fonte ( $\omega$ ) e não sua frequência natural ( $\nu$ ).

$\Rightarrow$  Pegando uma função da mesma classe funcional, temos que a solução particular

será:  $\boxed{Q_p(t) = Q_0 \cos(\omega t - \phi)}$  onde  $Q_0$  e  $\phi$  são:

$$Q_0 = \frac{V_0}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}} \quad \text{e} \quad \text{tg} \phi = \frac{-R\omega}{L\omega^2 - \frac{1}{C}}$$

Lembrando que a frequência natural (do LC) é  $\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  temos:

$$Q_0 = \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{1/2}} \quad \text{e} \quad \text{tg} \phi = \frac{-R\omega}{L(\omega^2 - \nu^2)}$$

A corrente nesse caso é:  $I(t) = -I_0 \sin(\omega t - \phi)$   
 $\hookrightarrow I_0 = \omega Q_0$

A partir disso, conseguimos notar que as amplitudes  $I_0$  e  $Q_0$  dependem das duas frequências  $\nu$ ,  $\omega$ . Além disso, essas funções são responsáveis pela regulação e eficiência dos trocas de Energia entre a fonte e o sistema. Onde para a troca ser eficiente, a mesma exige uma alta amplitude.

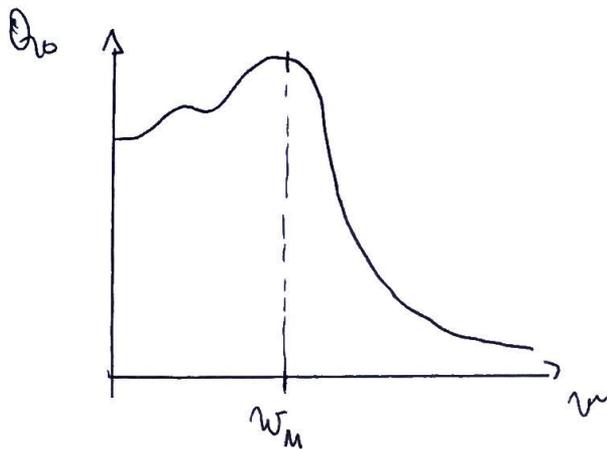
Vamos agora estudar as funções  $Q_0(\omega)$  e  $I_0(\omega)$ .

$Q_0(0) = CV_0 \rightsquigarrow$  fonte estática, regime estacionário que envolve um capacitor  $\hookrightarrow$  carga constante.

$Q_0(\infty) = 0 \rightsquigarrow$  A frequência é tão alta que o circuito perde o tempo de resposta e logo a carga no circuito não oscila.

Tentando encontrar a máxima da função:  $\frac{dQ_0(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$   
 ou  $\omega_m = \sqrt{\nu^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$   
 máximo  $\rightarrow$

O gráfico de  $Q_0(\omega) \times \omega$  é:



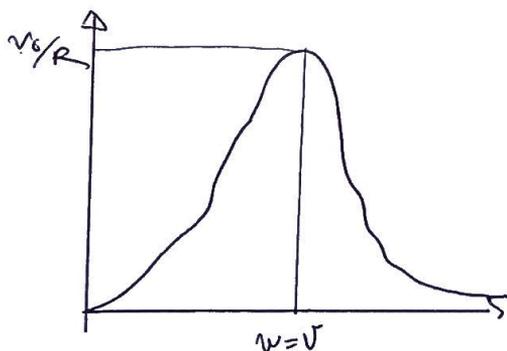
Analisando agora a função  $I_0(\omega)$  temos:

$I_0(0) = 0 \rightarrow$  capacitor / carga constante, não há corrente.

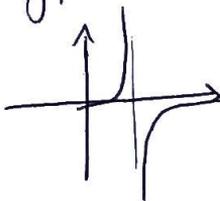
$I_0(\infty) = 0 \rightarrow$  incapacidade de responder a oscilações muito rápidas.

$$\frac{dI_0(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \nu} ; I_0(\omega = \nu) = \frac{V_0}{R}$$

Quando  $\omega = \nu$  temos que a Amplitude da corrente é máxima.



$\leadsto$  Se  $\omega = \nu$ , temos que  $\tan \phi \rightarrow \infty \Rightarrow \phi \rightarrow \pi/2$



Troca de Energia: A respeito de correntes alternadas, é mais fácil analisar a potência média durante um período  $T$ :

Definido por:  $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$ ; realizando os cálculos para

o capacitor e o indutor temos:

$$\langle P_C \rangle = \left\langle \frac{dU_C}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{T} [U_C(t) - U_C(0)] = \underline{0}$$

$$\langle P_L \rangle = \left\langle \frac{dU_L}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{dU_L}{dt} = \frac{1}{T} [U_L(t) - U_L(0)] = \underline{0}$$

⇒  $\langle P_C \rangle = \langle P_L \rangle = 0$ ; o significado físico disso é que há

troca de energia entre capacitor e indutor, mas não há acúmulo de energia. Logo, toda energia fornecida pela fonte é dissipada pelo resistor.

Fonte:  $\langle P_V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) \cdot I(t) = \frac{R V_0^2 \omega^2}{2[L^2(\omega^2 - \omega_0^2) + R^2 \omega^2]} = \langle P_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T R I^2(t) dt$

Note que  $\langle P_V \rangle$  pode ser reescrito como:

$$\langle P_V \rangle = \frac{1}{2} R \bar{I}_0^2$$

→ Temos que quando  $I$  for máximo,  $\langle P_V \rangle$  será máximo.

Logo, quando  $\omega = \omega_0$  ocorre uma ressonância entre fonte e sistema, onde a transferência de energia da fonte para o sistema é a mais eficiente possível. Fazendo com que  $I(t)$  esteja em fase com a fonte;  $I_{\text{res}} = I_0 \cos \omega t$ , a fonte realiza trabalho a favor do movimento natural da corrente.

## Impedância:

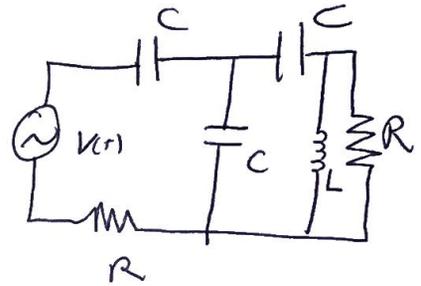
↳ generalização da ideia de resistência, que acople também indutância e capacitância.

↳ generalização de  $V = RI$  para casos mais complexos envolvendo circuitos de corrente alternada. ex:

$$C \rightarrow Z_C$$

$$R \rightarrow Z_R$$

$$L \rightarrow Z_L$$



$Z \in \mathbb{C} \rightarrow$  obedece as regras de Associação de resistores.

Método: Conhecendo fonte e componentes, como encontrar a corrente?

↳  $I(t)$  oscila c/ mesma frequência da fonte a determinar

$$V = V_0 \cos \omega t, \text{ conhecida} \rightarrow I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

↳ generalização das fórmulas, para função complexa:

$$V(t) \rightarrow \hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$
$$I(t) \rightarrow \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

→ Generalização da Lei de Ohm: 
$$\boxed{\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t)}$$

onde  $Z = |Z| e^{i\delta}$

$$I(t) = \text{Re} \left[ \hat{I} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\delta}} \right]$$

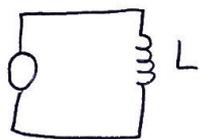
Como calcular a Impedância?

→ montar a E.D.O

→ generalizações complexas.

$$\rightarrow Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}$$

• Indutor:



E.D.O  $\Rightarrow V = L \frac{dI}{dt}$

$\Downarrow$

$$\hat{V} = L \frac{d\hat{I}}{dt} \rightarrow V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

logo,  $Z_L = i\omega L$

• Capacitor:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \xrightarrow{C} \hat{V}(t) = \frac{\hat{Q}(t)}{C}; \hat{Q}(t) = \frac{1}{i\omega C} \hat{I}(t)$$

$\Rightarrow Z_C = \frac{-i}{\omega C}$

• Resistor:  $V(t) = R \cdot I(t) \rightarrow \hat{V}(t) = R \hat{I}(t)$

$\Rightarrow Z_R = R$

● pq números complexos?

→ pois indutores e capacitores estão associados a elementos que conservam energia. Enquanto resistores dissipam. Com

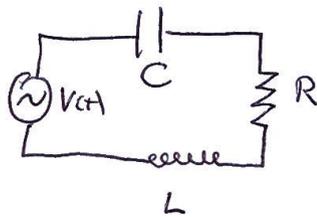
os complexos, conseguimos diferenciar e trabalhar com eles.

Isso nos leva ao seguinte:

Im  $\rightarrow$  conserva energia

Re  $\rightarrow$  dissipa energia

EX 1: RLC simples -



1.  $V(t) = V_0 \cos \omega t \rightarrow V_0 e^{i\omega t}$

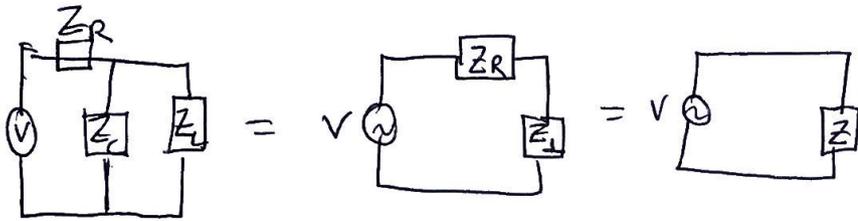
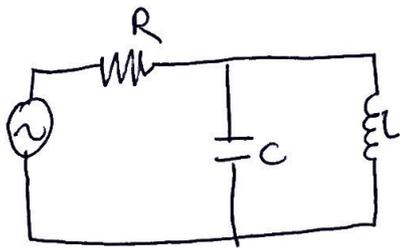
2.  $Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$

$Z = |Z| e^{i\delta}$ ;  $|Z| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ ;  $\tan \delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

3.  $\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\delta}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}$

4.  $\text{Re}[\hat{I}(t)] = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t - \delta)$ ; onde  $\delta = \arctan \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$

Ex 21: corrente no resistor e a carga no capacitor.



Associação em paralelo de  $Z_C$  e  $Z_L$ :

$$Z_1 = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$Z_1$  e  $Z_R$ :

$$Z = Z_1 + Z_R = R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Usando coordenadas polares:  $Z = |Z|e^{i\delta}$ ;  $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}$

e  $\tan \delta = \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$  logo temos:

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2\right]^{1/2}} ; I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2\right]^{1/2}}$$

•  $\leadsto$  determinar a corrente no capacitor:

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t) = Z_R \hat{I}(t) + Z_L \hat{I}(t) = \hat{V}_R(t) + \hat{V}_L(t)$$

$$\hat{V}_L(t) = Z_L \hat{I}(t)$$

A corrente se divide em dois  $\hat{I}_C$  e  $\hat{I}_L$ :

•  $\Rightarrow \hat{V}_L(t) = Z_C \hat{I}_C$  e  $\hat{V}_L(t) = Z_L \hat{I}_L(t)$

$$\hat{I}_C = \frac{\hat{V}_L(t)}{Z_C} = \frac{Z_L}{Z_C} \hat{I}(t) = \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \hat{I}(t)$$

$$\Rightarrow \bar{I}_C(t) = \bar{I}_{oc} \cos(\omega t - \delta)$$

•  $\bar{I}_{oc} = \frac{\omega^2 CL}{(1 - \omega^2 LC)} I_0$ ; A carga no capacitor é dada por:

$$Q_c(t) = \int dt \bar{I}_{oc} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\bar{I}_{oc}}{\omega} \sin(\omega t - \delta) = \frac{\omega LC}{(1 - \omega^2 LC)} I_0 \sin(\omega t - \delta)$$

Potência: Deduziremos uma relação entre a potência média fornecida pela fonte,  $\rightarrow v = v_0 \cos \omega t$  e a impedância de um sistema:

A mesma pode ser escrita como:  $Z = x + iy = |Z| e^{i\delta}$  onde

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  o  $\tan \delta = \frac{y}{x}$ ; A corrente  $\hat{I}(t)$  é dada por:

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\delta}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \delta)}, \text{ usando: } \cos \delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \sin \delta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_0}{|Z|} [\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta] = \frac{V_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} [x \cos \omega t + y \sin \omega t]$$

A potência média fornecida pela fonte será:

$$\langle P_v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) I(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{V_0^2}{|Z|} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_0^2}{2} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$\rightarrow$  a parte real  $x$  descreve a dissipação de energia enquanto  $y$  é respeito a sua conservação. Se a impedância de um sistema for puramente imaginária, teremos que sua potência média ao longo de 1 período será sempre nula. Além disso, se a impedância possuir uma parte real e positiva, isso significa que o gerador estará fornecendo energia ao sistema em cada período.

# Circuito LC Infinito:

Vimos até agora como se comporta um circuito "pequeno", agora iremos ver circuitos "grandes" tais que as interações entre as diferentes partes dos circuitos não podem ser consideradas instantâneas, e como se manifestam esses efeitos de retardamento.

Linhas de Transmissão: objeto construído por dois condutores longos e paralelos, fonte de tensão ligada a linha  $\xrightarrow{\text{gera campos eletromagnéticos}}$   $\xrightarrow{\text{apresenta}}$  Capacitância e Indutância

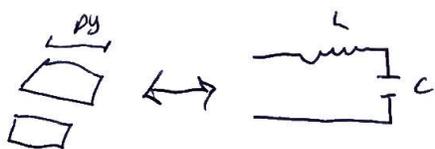
A partir de agora iremos pensar numa placa metálica como nossa linha de transmissão.

$\downarrow$  implica  
energia armazenada.

$\hookrightarrow$  podemos pensar que cada trecho  $\Delta y$  da placa possui um certo C e L.

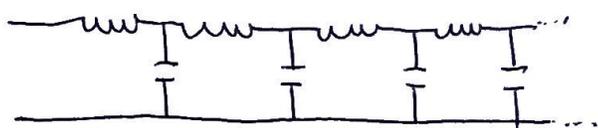
$\hookrightarrow$  Com isso, podemos imaginar um modelo de circuito LC nesse trecho  $\Delta y$  da linha de transmissão. Interando infinitamente essa ideia, chegamos ao fato que nosso modelo é composto por infinitos circuitos LC, logo temos assim um circuito LC infinito, acoplados um ao outro.

$\hookrightarrow$  Mas como resolver esse circuito?  $\rightarrow$  Através da Impedância complexa.



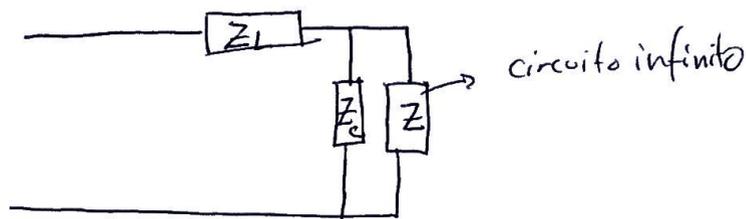
nota: pela simplicidade do modelo, estamos ignorando a resistência do material.

A linha de transmissão pode ser vista como:



$Z \rightarrow$  impedância do circuito infinito.

Truque: Como se trata de um circuito infinito, por propriedade de infinitos se retirarmos um pedaço do circuito, o mesmo continua infinito e com isso, sua impedância permanece inalterada. Logo,



Como a impedância do circuito é  $Z$ , fazemos as associações terros:

$$Z = Z_L + \frac{Z Z_C}{Z + Z_C} \rightarrow Z^2 - Z Z_L - Z_L Z_C = 0$$

eq do 2º grau em  $Z$

$$\Rightarrow Z = \frac{Z_L}{2} + \sqrt{\frac{Z_L^2}{4} + Z_L Z_C}$$

↳ ñ tem significado físico.

$$\Rightarrow Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + i \frac{\omega L}{2}$$

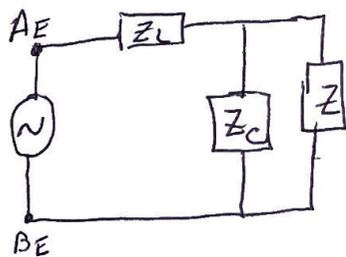
note que essa impedância depende da frequência da fonte  $\omega$

↳ freq. baixas  $\omega^2 < 4/LC \rightarrow$  propagação de energia devida justamente a um termo real, Logo o 1º circuito q recebe energia, que vai ser passada para o 2º e assim por diante...

- $\leadsto$  freq altas  $\omega^2 > 4/LC \rightarrow$  não há transmissão de energia  
~~para~~ número puramente imaginário  
 logo toda energia é estocada nos capacitores e indutores.

Tensão no primeiro capacitor:

- Supondo que o gerador fosse do tipo  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ , ao ligar a fonte iria gerar correntes no indutor e cargas são acumuladas no capacitor, o que gera uma tensão  $V_L(t)$ . Essa tensão é responsável pela corrente e acúmulo de cargas no indutor do circuito seguinte e assim sucessivamente. Logo, a tensão ao longo da linha de transmissão depende da tensão no primeiro circuito.



$$\hat{I}_E = \frac{\hat{V}_E}{Z} \quad ; \quad \hat{V}_E = \hat{I}_E Z_L + \hat{V}_L \Rightarrow \hat{V}_L = \left( 1 - \frac{Z_L}{Z} \right) \hat{V}_E$$

onde;

$$1 - \frac{Z_L}{Z} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 L^2} - \frac{z\omega L}{Z}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 L^2} + \frac{z\omega L}{Z}}$$

$\swarrow$   
 $\rightarrow$  novamente, depende da frequência da fonte  $\underline{\omega}$

~> freq. baixas  $\omega^2 < 4/LC$  ~> raiz positiva, logo  $(1 - Z_L/Z)$

é a divisão de um número complexo pelo seu conjugado:

$$1 - \frac{Z_L}{Z} = \frac{pe^{-i\phi}}{pe^{i\phi}} = e^{-2i\phi} \Rightarrow \hat{V}_1 = e^{-2i2\phi} \hat{V}_E$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{V}_1(t) = V_0 \cos(\omega t - 2\phi)}$$

~> freq. altas  $\omega^2 > 4/LC$  ~> nesse caso teríamos:

$$\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) = -\eta < 1 \rightarrow V_1(t) = -\eta V_0 \cos \omega t$$

~> tensão cai ao longo da linha de transmissão.

~> Agora se  $\omega^2 = 4/LC \rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}}$

denominada Frequência de corte

~> separa os regimes de freq. altas e baixas.

~> Tensão ao longo do LC infinito: Como cada pedaço é alimentado pela

tensão anterior:  $\hat{V}_2 = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right] \hat{V}_1 \Rightarrow \hat{V}_2 = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right]^2 \hat{V}_E$

~>  $\hat{V}_n = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right]^n V_0 \rightarrow$

freq. baixas  $\rightarrow V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - 2n\phi)$

freq. altas  $\rightarrow V_n(t) = (-\eta)^n V_0 \cos \omega t$

→ Logo, podemos concluir que a baixas frequências as tensões oscilam a mesma frequência e amplitude que a fonte, logo, a energia é transportada ao longo da linha de transmissão. Enquanto, que quando a freq. é alta, a tensão vai caindo e tendendo cada vez mais a zero.

