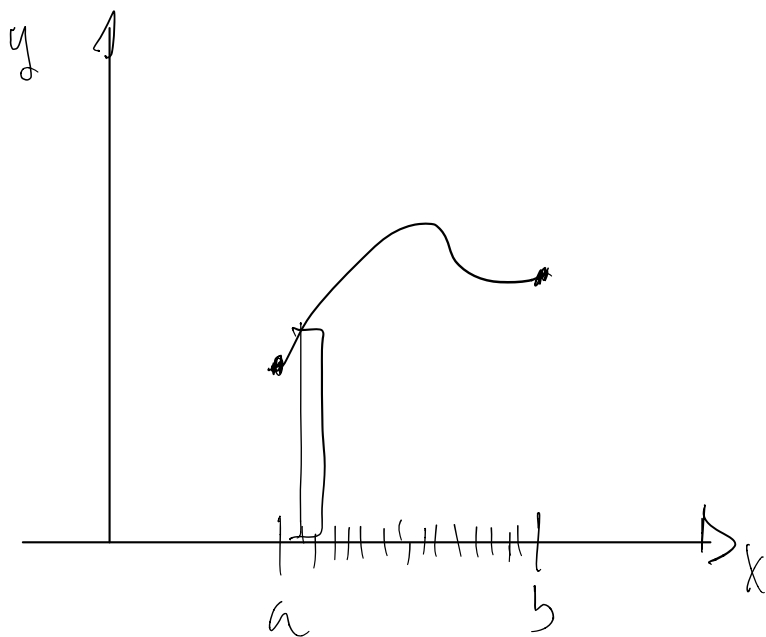


Integral Definida

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



p = partição de $[a, b]$

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

$|p|$ = diâmetro da partição

$$\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{f(\bar{t}_i)}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{\text{largura}} \rightsquigarrow \text{aproximador da área embaixo do gráfico}$$

$$\hookrightarrow S(f, P, \{\bar{t}_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

$\hookrightarrow$ Soma de Riemann

teo. Funda. Cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

F é primitiva de f
 $F'(x) = f(x)$

A média de uma função é uma função constante que sobre as mesmas bases realiza a mesma área que a própria função.

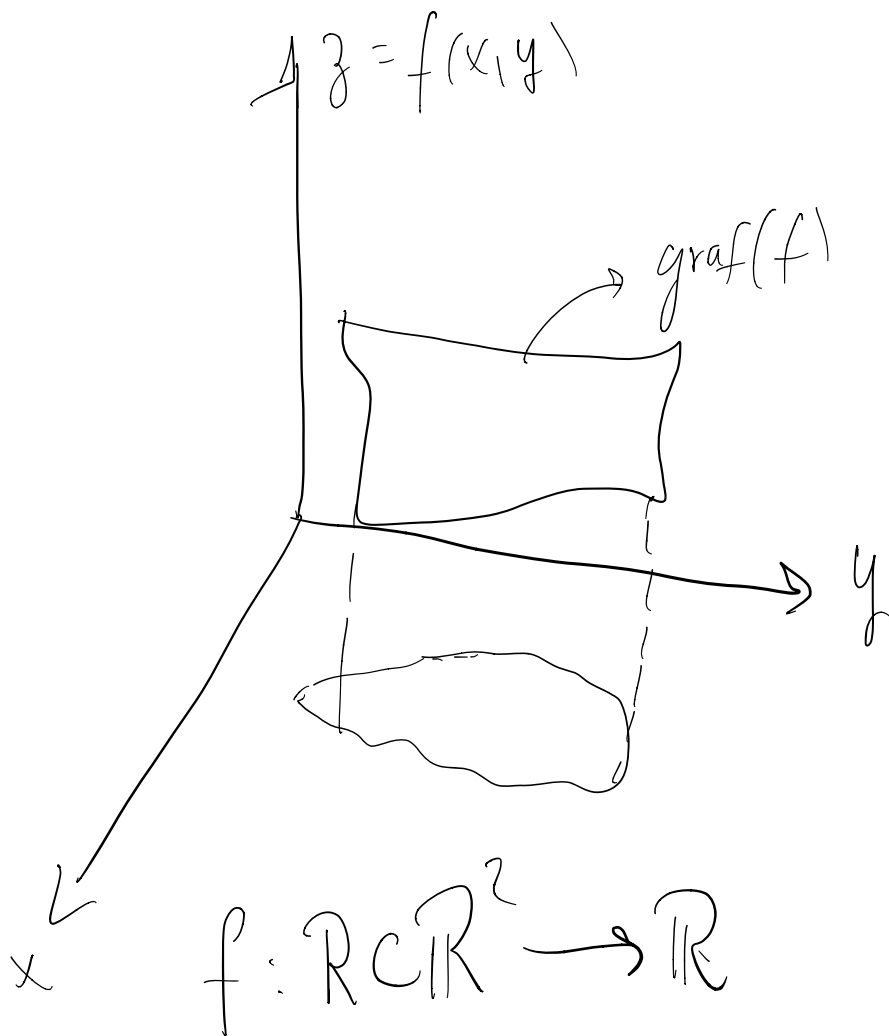
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = M(\pi - 0) \Rightarrow -\cos \Big|_0^{\pi} \Rightarrow \cos \pi + \cos 0 = M \cdot \pi$$

$$M\pi = 2 \Rightarrow \text{Média} = \frac{2}{\pi}$$

→ valor médio da função seno

$$M = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$$

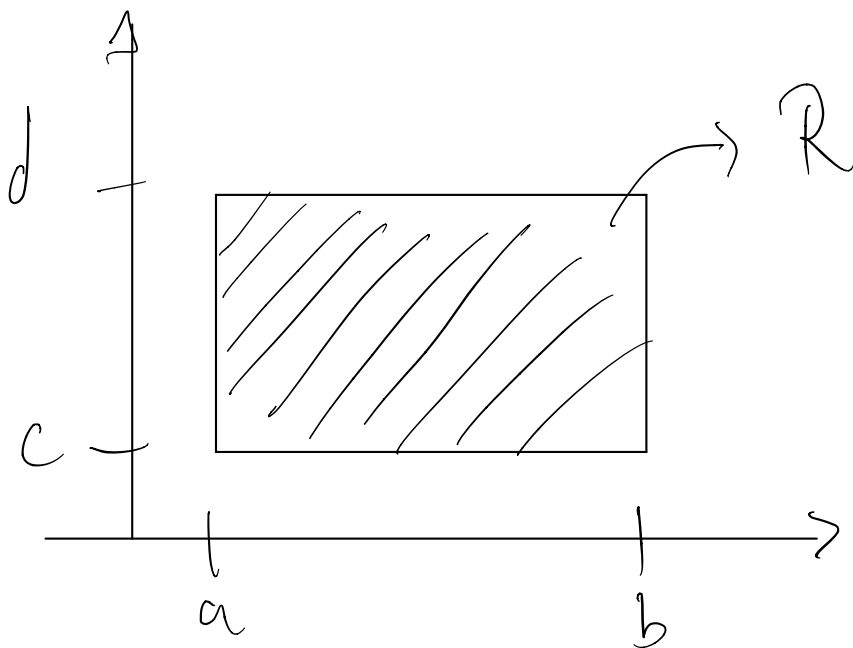
→ Valor médio de uma função num intervalo (a, b)



Integral Dupla:

Retângulo de lados paralelos aos eixos

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

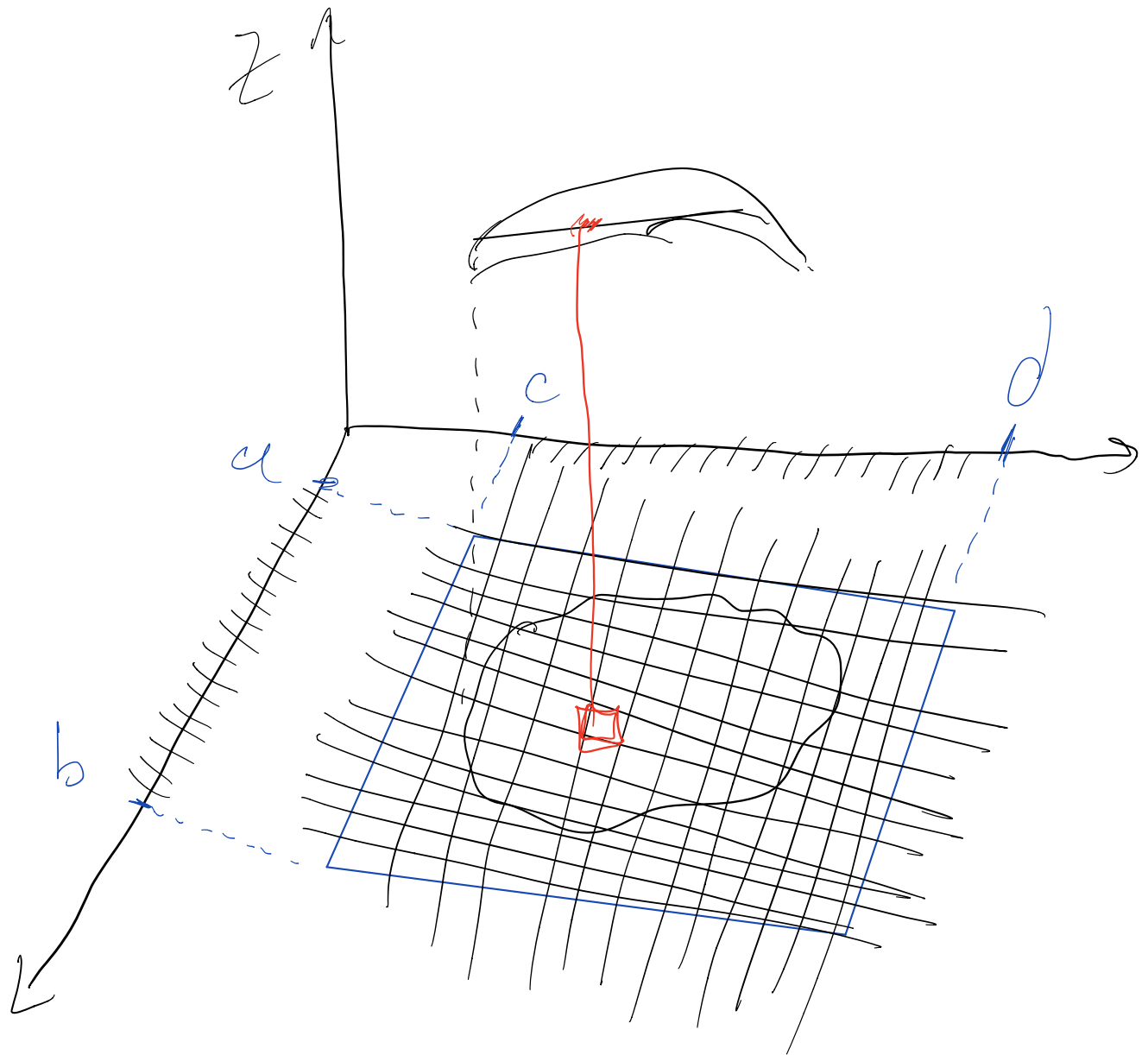


No entanto, por mais que seja simples montar a integral dupla, ela abrange apenas um pequeno leque de funções tornando-se uma ferramenta muito restritiva.

Def: $DC\mathbb{R}^2$ é limitado se existe retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ com DCR

Dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e com D limitado em $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}$, retângulo.

Tomamos partições de $[a, b]$ e de $[c, d]$



Partição dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$
O que gera retângulos menores que englobam a figura. Escolhendo então, um ponto arbitrário dentro de cada retângulo c/ sua respectiva partição

escolho $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{ij}$

$f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ área}(R_{ij})$

aproximador do volume abaixo do pequeno pedaço de superfície

↳ Se $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \notin D \Rightarrow f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0$

↳ Volume vai pra 0

Estimador do volume da superfície:

$$\sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ área}(R_{ij})$$

Se existir e for finito o $\lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{ área}(R_{ij})$
então dizemos que é integrável em D

Notação:

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

$dx dy = dA$
Elemento de área

↳ Possui as mesmas propriedades que a integral de uma variável.

Aplicações:

Imaginando uma função $f(x,y) = 1$ → Ou seja, com altura constante e igual a 1, ao calcular seu volume pela integral dupla, chegaremos também ao valor da área do domínio D , ao qual realizamos a partição.

$$V = \underbrace{h}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{A}_{\text{área}(D)}, \text{ se } f(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow V = 1 \cdot A \Rightarrow \boxed{V = A}$$

Logo, com isso conseguimos definir a área de qualquer região do $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\text{Área de } D = \iint_D 1 \, dx \, dy}$$

↳ Se a integral em algum conjunto D não existir, diz-se que o conjunto D não possui área.

Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, limitada se:

- a fronteira de D tiver área zero
- O conjunto das descontinuidades de D tiver área zero

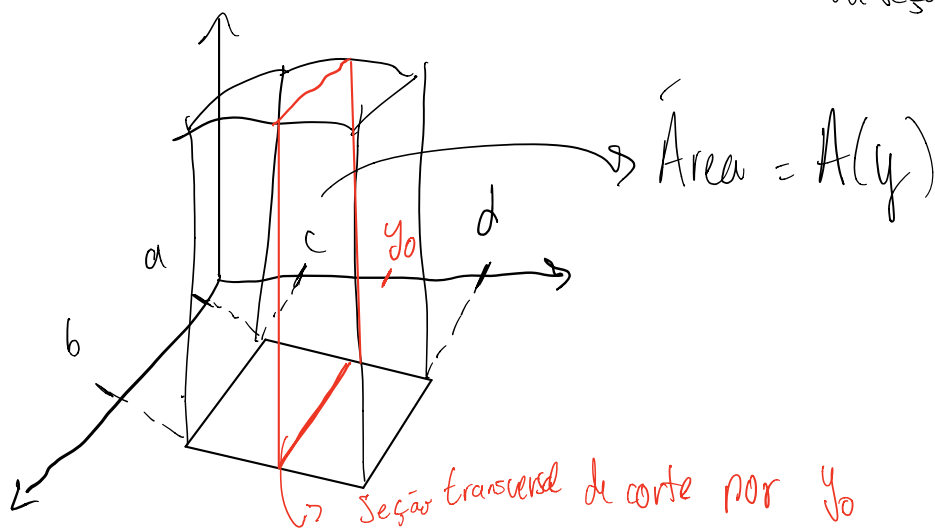
então existe:

$$\iint_D f(x,y) dx dy \quad \hookrightarrow \text{(função e domínio bem comportados)}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \text{área}(R_{ij})$$

Teorema de Fubini
(para retângulos)

$$y_0 \in [c,d] \rightarrow A(y_0) \text{ área da seção}$$



↳ Seção transversal de corte por y_0

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

↳ Nessa seção, temos que apenas x está variando ao passo que y está fixo em y_0 . Comportando-se como uma função de uma variável

$$y \in [c, d] \rightarrow A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\int_c^d A(y) dy \rightarrow \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

||

$\lim_{|p| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\bar{y}_i) \Delta y_i$ no Soma de Riemann da partição de y .

Teorema de Fubini:

$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada

$\forall y \in [c, d]$, $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ existe
e que $A: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então:

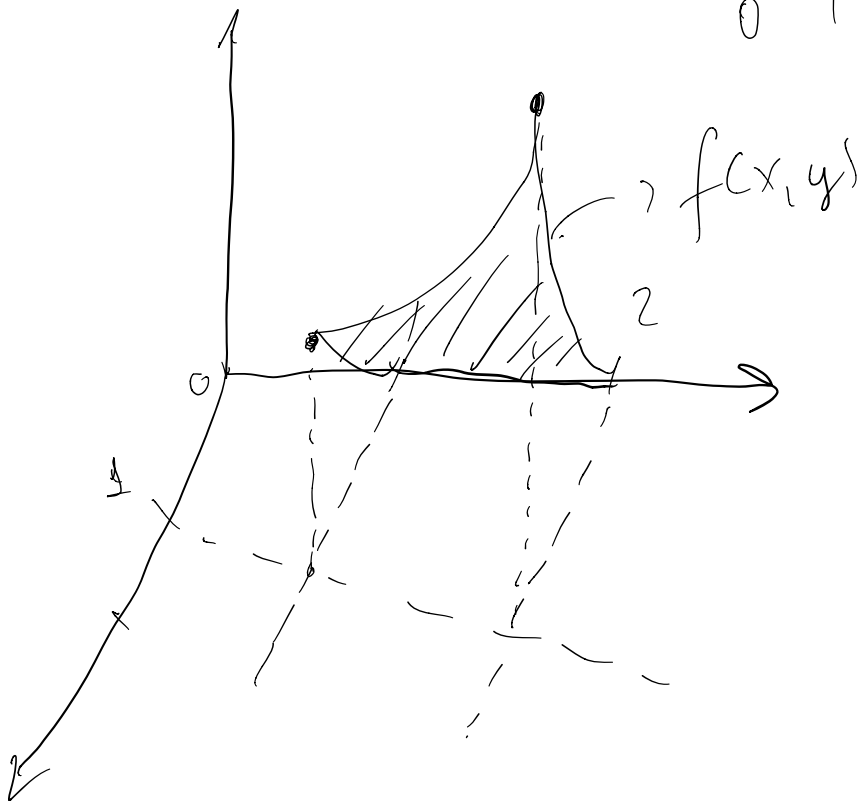
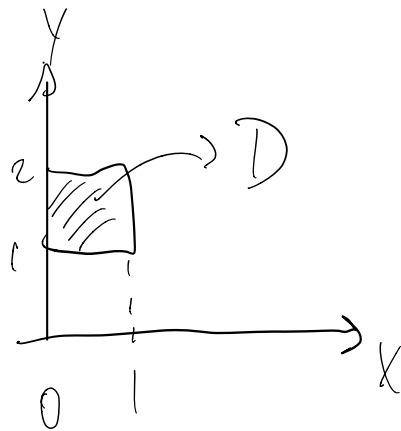
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Sob a mesma analogia:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

ex 2-) $\iint_D xy^2 dA$

$$D = [0, 1] \times [1, 2]$$



$$\iint_D xy^2 dA = \int_1^2 \left[\int_0^1 xy^2 dx \right] dy$$

Integral é feita de dentro p/ fora

↳ A primeira integração em x , mantem-se y constante

$$= \int_1^2 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^1 dy \Rightarrow \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy$$

$$\int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \quad \square$$

$$\iint_D xy^2 dA = \int_0^1 \int_1^2 xy^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_1^2 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{8x}{3} - \frac{x}{3} dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{7x}{3} dx$$

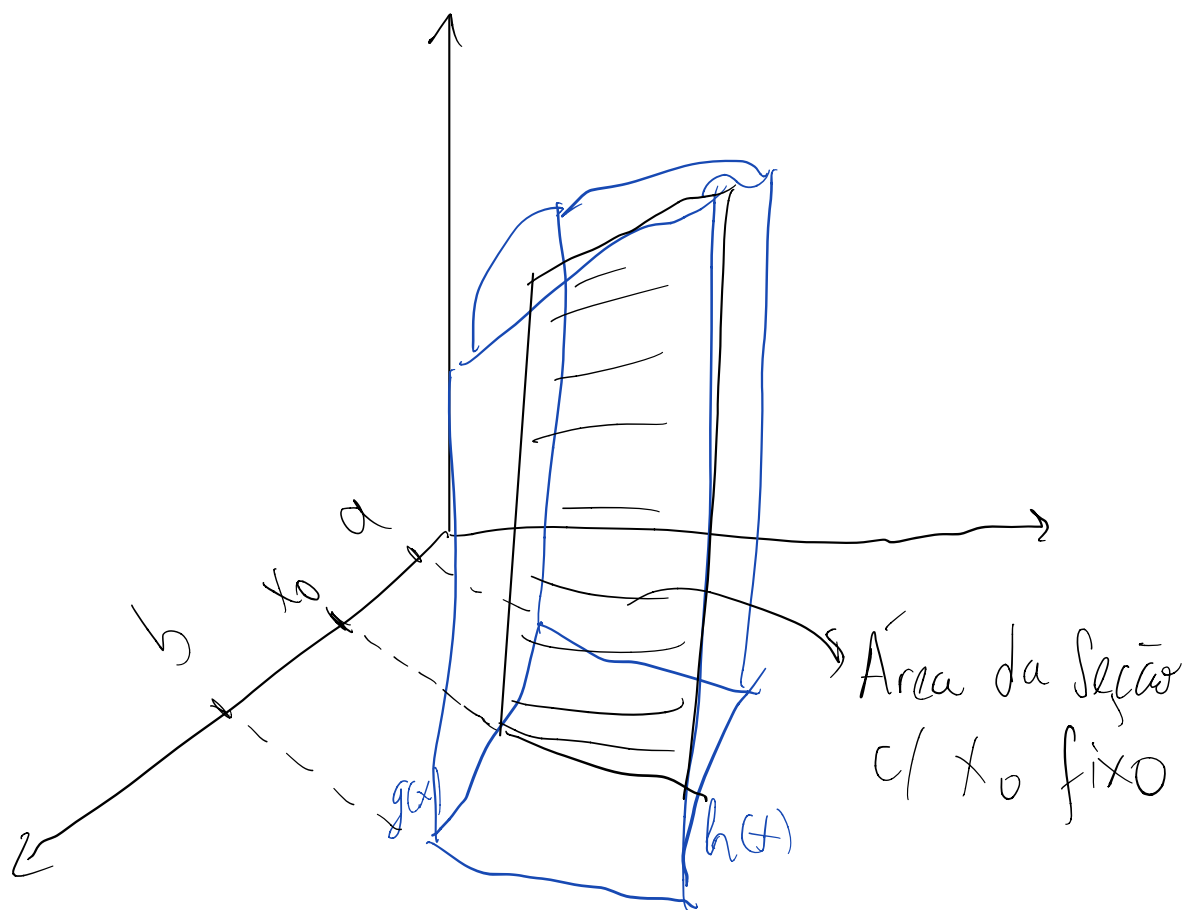
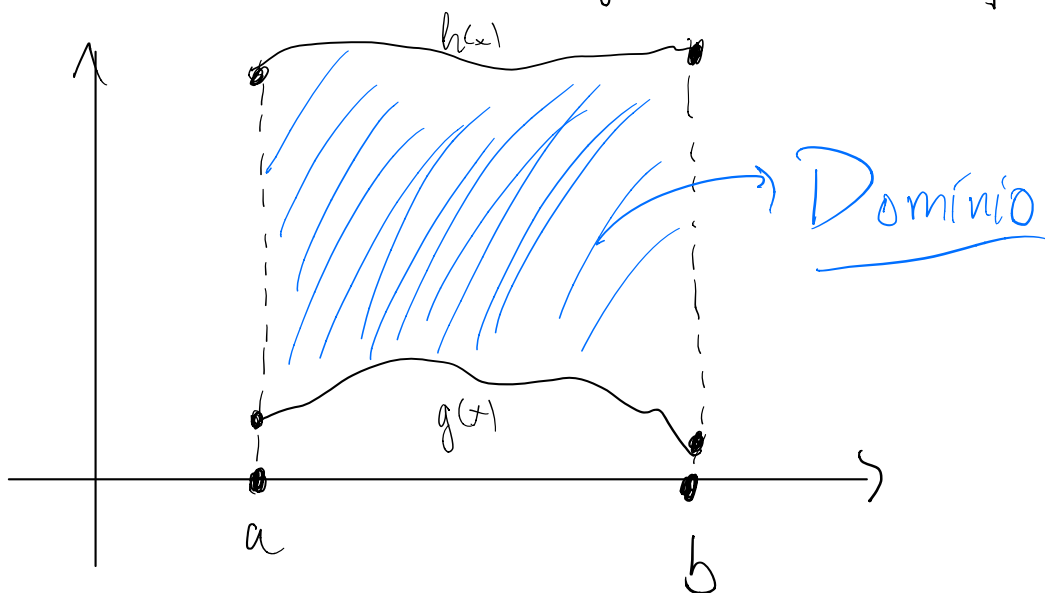
$$= \frac{7}{6} x^2 \Big|_0^1 = \frac{7}{6} - 0 = \frac{7}{6}$$

↳ Quando o domínio D trata-se de um retângulo, não importa a ordem de integração.

Teorema de Fubini (Geral)

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



$$A(x_0) = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y) dy \quad ; \text{fazendo agora } x_0 \text{ variar em } [a, b]$$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \quad ; \text{fazemos então essa área percorrer todo } x \in [a, b] \text{ obtendo então o volume}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

Ex 2: Calcule $\iint_D (x^2 - 2x) dA$

Seja D a região limitada entre o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e $y = 2 - x$ com $0 \leq x \leq 1$



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x} (x^2 - 2x) dy dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x) y \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx = \int_0^1 (x^2 - 2x) [\sqrt{x} - 2x] dx$$

$$\int_0^1 (2x^2 - x^2 + 2x^2 - 4x - x^{5/2} + 2x^{3/2}) dx$$

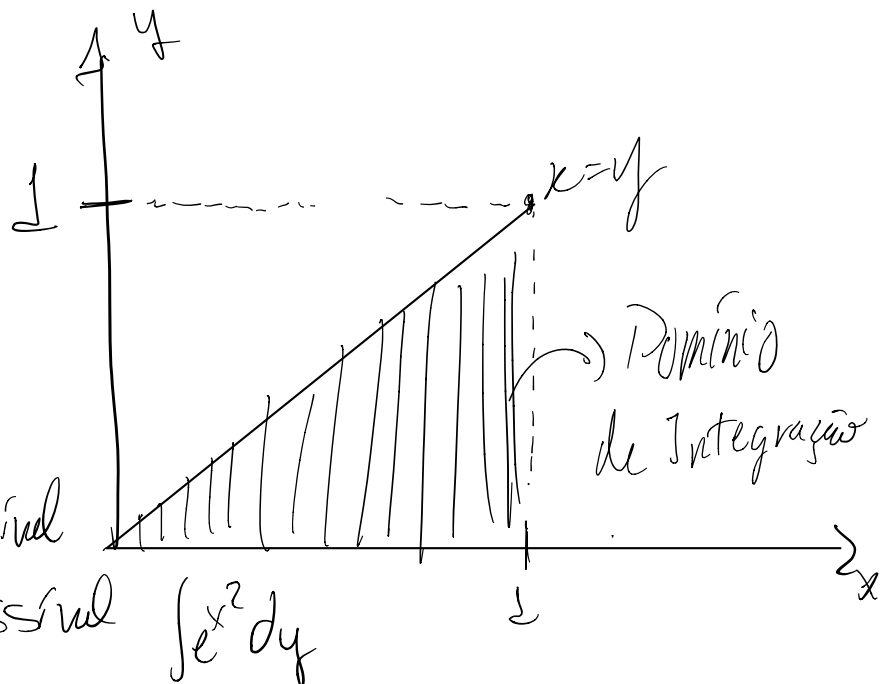
$$\left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{4}{5} x^{5/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - 2 - \frac{2}{7} + \frac{4}{5}$$

Ex: Calcule:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$$

Inverte-se a ordem de integração por é impossível resolver $\int e^{x^2} dx$ mas é possível $\int e^{x^2} dy$



Invertendo a ordem de integração:

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$$

mudança de ordem mas de uma maneira que continue respeitando o teorema de Fubini.

$$\int_0^1 e^{x^2} y \Big|_0^x dx = \int_0^1 \underbrace{x e^{x^2}}_{\frac{du}{2}} dx$$

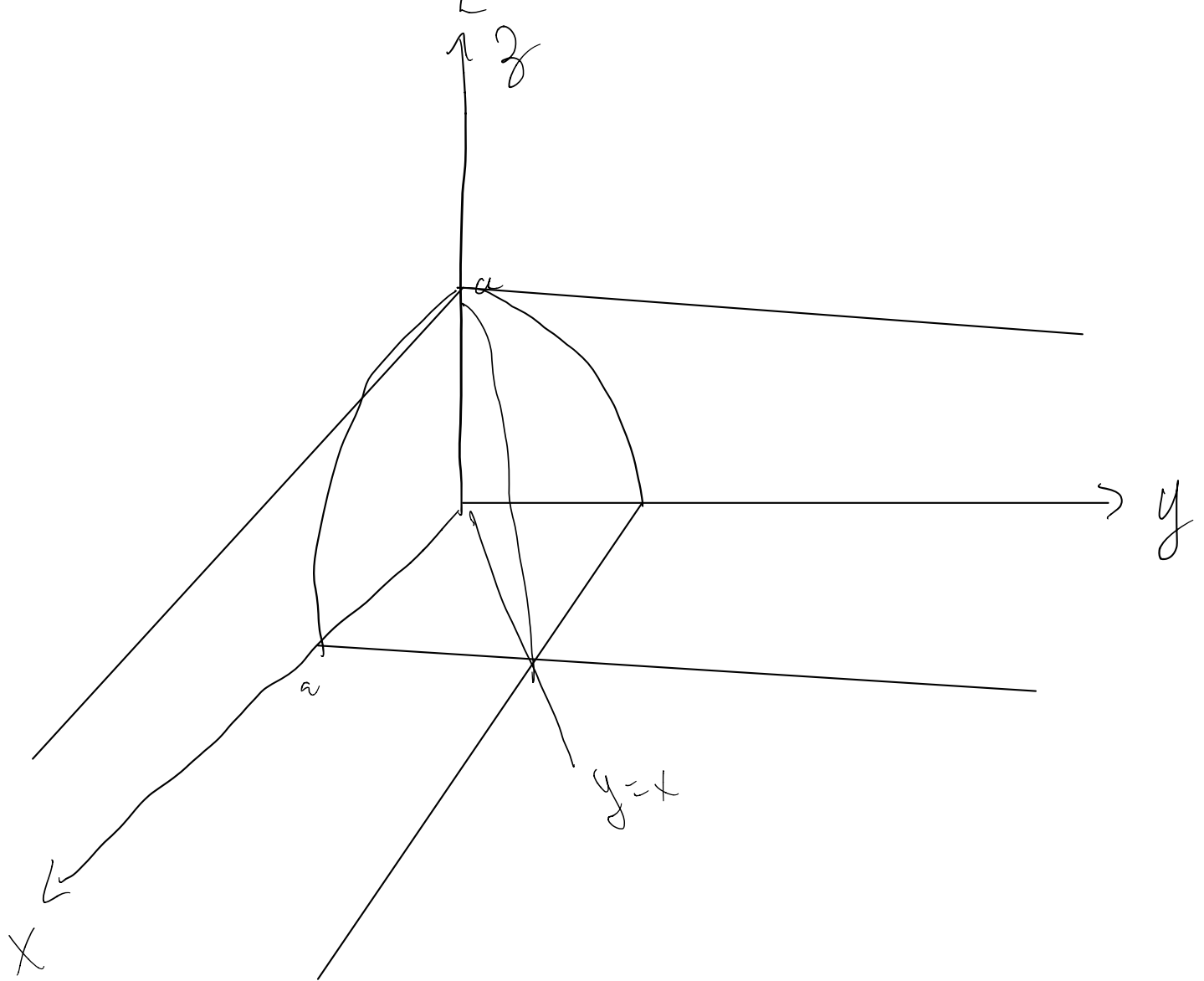
$$u = x^2 \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

$$du = 2 \cdot x dx$$

$$\boxed{\frac{du}{2} = x dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^u}{2} du \Rightarrow \frac{e^u}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}(e-1)}}$$

Ex 2: Calcule o volume do sólido dado por: $x^2 + z^2 \leq a^2$
 $y^2 + z^2 \leq a^2$ ($a > 0$)



$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\leadsto y^2 = x^2$$

$$y = \pm x$$

$$V = 16 \int_0^a \int_0^y \sqrt{a^2 - y^2} \, dx \, dy$$

$$V = 16 \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

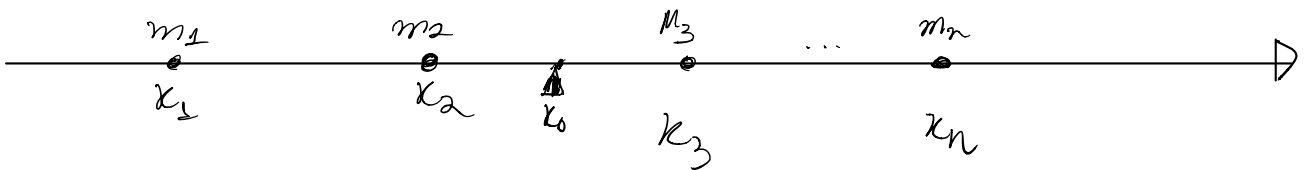
$$u = a^2 - y^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = a^2 \\ u = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} y=0 \\ y=a \end{array}$$

$$du = -2y dy$$

$$y dy = \frac{du}{2}$$

$$V = \frac{16}{2} \int_{a^2}^0 \sqrt{u} du = V = \frac{16}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{16}{2} \int_0^{a^2} u^{1/2} du$$

$$V = \frac{16}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{16}{3} (a^2)^{3/2} = \frac{16a^3}{3}$$



$$\sum_{\text{momentos}} M_{x=x_0} \sum m_i (x_i - x_0)$$

$M_x = X_G \leadsto$ Centro de gravidade (se apoiado em cima de $x_0 = X_G$ o sistema permanece em equilíbrio estático)

$$\sum (x_i - x_G) m_i = 0$$

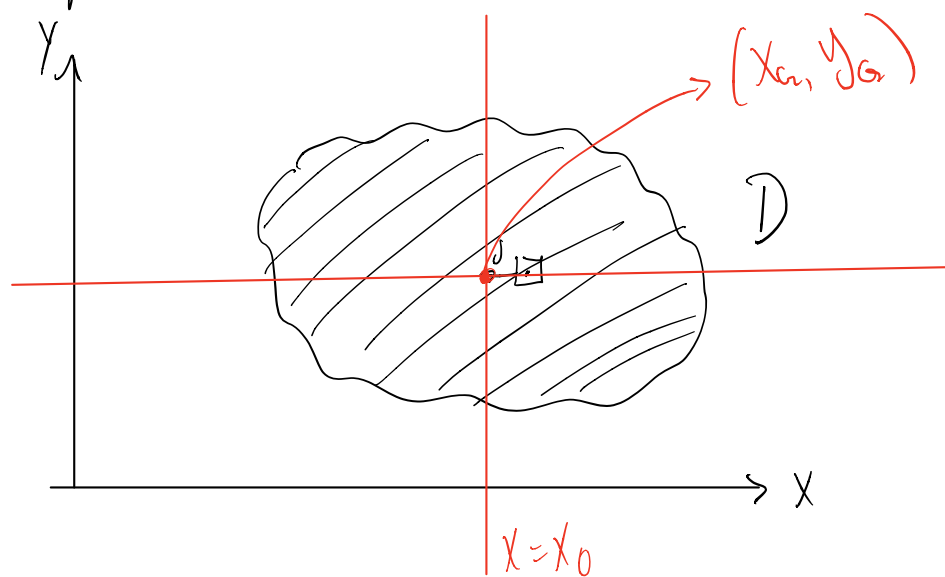
$$\sum m_i x_i - \sum m_i x_G = 0 \Rightarrow \boxed{\sum m_i x_i = x_G \sum m_i}$$

Definição de centro de gravidade:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M_{x=0}}{\text{massa}}$$

Aplicação:

$D \subset \mathbb{R}^2$ placa com $\delta: D \rightarrow \mathbb{R}$ $\delta(x,y)$ = densidade superficial



O Centro de gravidade da placa sera dada pelo seguinte raciocínio:
 Encontrar uma reta vertical na qual equilibre o objeto de qualquer movimento horizontal, depois encontrar outra reta horizontal que equilibre o objeto de qualquer movimento vertical. O centro de gravidade será a interseção dessas duas retas.

$\sum_{i,j} \delta(x_i, y_j) \text{área}(R_{ij}) (x_i - x_0) \approx \text{estimador do momento}$

$$M_{x=x_0} = \iint_D (x - x_0) \delta(x, y) dA$$

$$M_{y=y_0} = \iint_D (y - y_0) \delta(x, y) dA$$

(x_G, y_G) é o centro de gravidade de D se $M_{x=x_G} = 0$ $M_{y=y_G} = 0$

$$M_{x=x_G} = 0 \Leftrightarrow \iint_D (x - x_G) \delta(x, y) dA = 0 \Rightarrow \iint_D x \delta(x, y) dA = \iint_D x_G \delta(x, y) dA$$

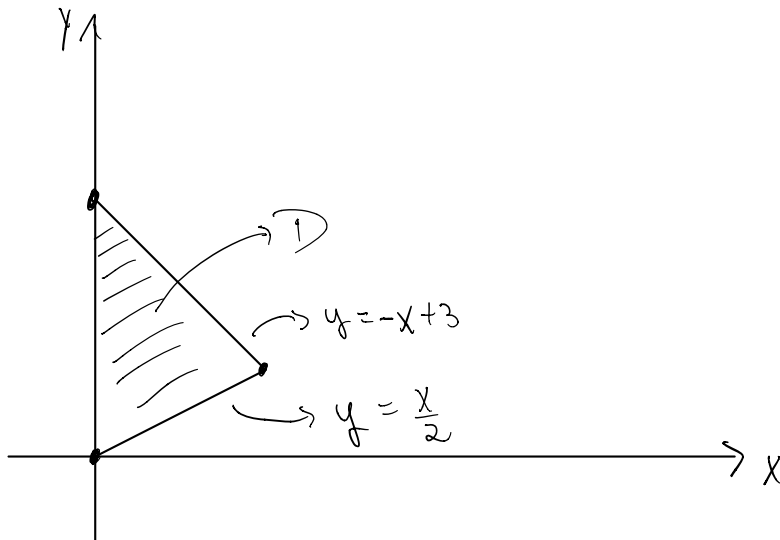
$$\iint_D x \delta(x, y) dA = x_G \iint_D \delta(x, y) dA \Rightarrow x_G = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dA}{\iint_D \delta(x, y) dA}$$

Concomitantemente p/ y_G :

$$y_G = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dA}{\iint_D \delta(x, y) dA}$$

Ex 3: Centro de gravidade de um triângulo de vértices $(0,0)$; $(0,3)$; $(2,1)$ com densidade proporcional à abscissa do ponto.

$$\delta(x,y) = k \cdot x \quad k \in \mathbb{R}, \text{ constante}$$



$$\text{massa} = \iint_D \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx dy dx$$

$$k \int_0^2 \left(-x^2 + 3x - \frac{x^2}{2} \right) dx = k \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 \Rightarrow k \left(-\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - \frac{8}{6} \right) = \underline{2k}$$

$$M_{x=0} = \iint_D x \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx^2 dy dx = k \int_0^2 x^2 y \Big|_{x/2}^{-x+3} dx = k \int_0^2 \left(-x^3 + 3x^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx$$

$$= k \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_0^2 = k(-4 + 8 - 2) = \underline{2k} \quad \leadsto \quad \underline{X_G = \frac{2k}{2k} = 1}$$

$$M_{y=0} = \iint_D y \delta(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} k+y dy dx$$

Mudança de variáveis

Observações preliminares

1-) Em uma variável:

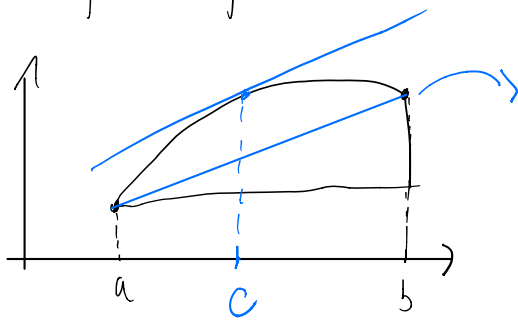
$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_c^d f(g(u)) g'(u) du$$

$$\underbrace{X = g(u) \quad dx = g'(u) du}_{\text{mudança de variável}}$$

2-) Teorema do valor médio (TVM)

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b-a)$$

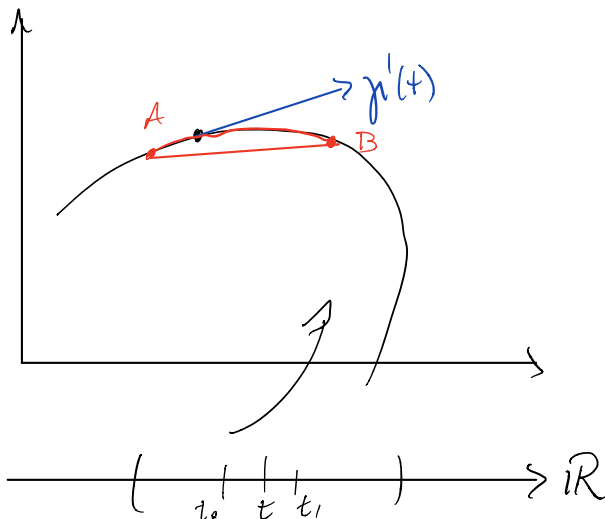


$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

→ TVM diz que existe um ponto "c" no meio do intervalo $[a, b]$ cuja tangente (derivada) é paralela a reta ab

3-) Curvas

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (\text{no plano})$$



$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad (\text{vetor tangente a curva})$$

$$A = \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$$

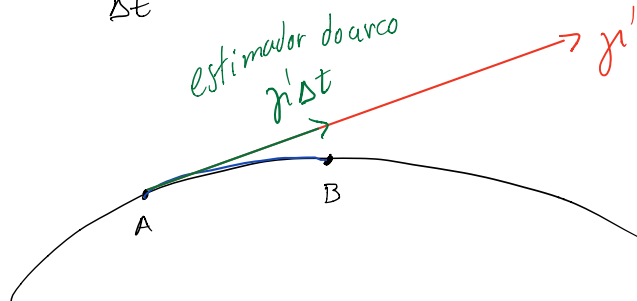
$$B = \gamma(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$$

Na situação limite em que $B \rightarrow A$ tanto a reta $\overline{AB}$ quanto o arco $\overline{AB}$ tende a ficar mais próximos (direção e tamanho). Quando $\Delta t \rightarrow 0$

Logo quando $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \widehat{AB} \approx \overrightarrow{AB} = (x(t_1) - x(t_0); y(t_1) - y(t_0))$

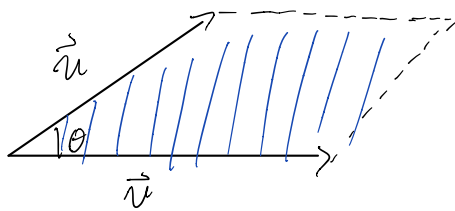
aplicando o TVM

$$\left(\underbrace{x'(\bar{t})}_{\Delta t} (\underbrace{t_1 - t_0}_{\Delta t}); \underbrace{y'(\bar{t})}_{\Delta t} (\underbrace{t_1 - t_0}_{\Delta t}) \right) \approx (x'(\bar{t}); y'(\bar{t})) \cdot \Delta t = y'(\bar{t}) \Delta t$$



4-) Produto vetorial $\vec{u}, \vec{v}$ vetores no $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} ; \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$$



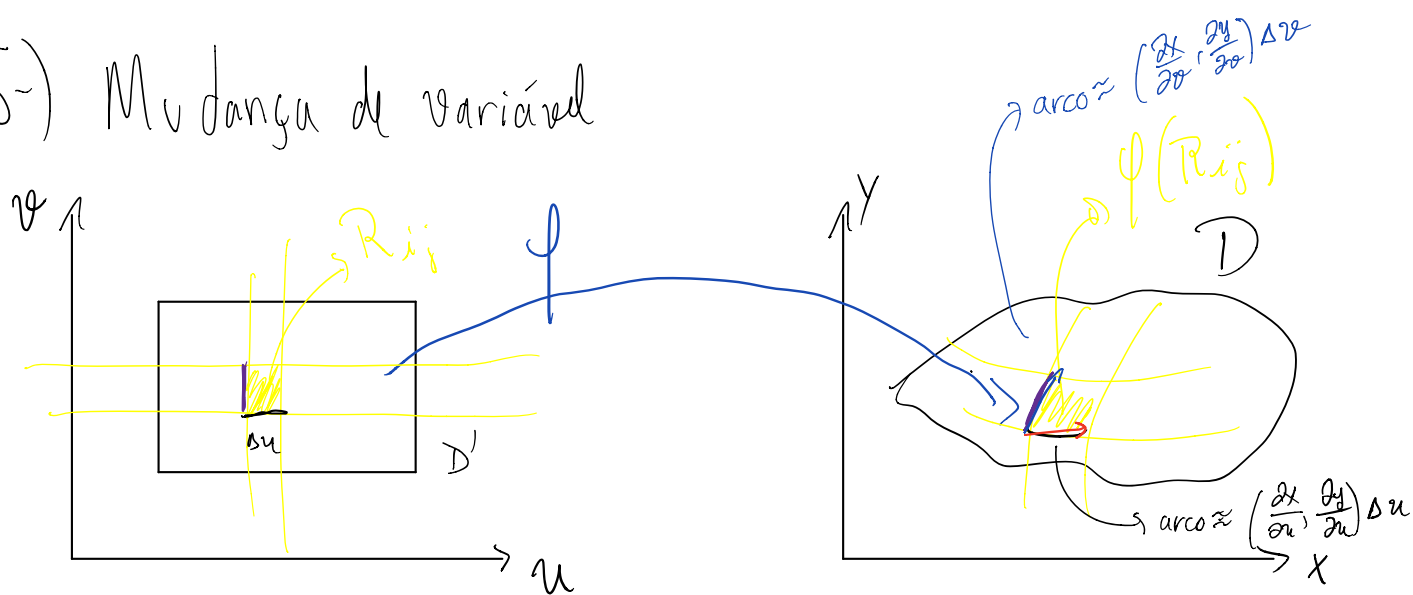
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$$

↳ área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

"em $\mathbb{R}^2$ "

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

5-) Mudança de variável



A fim de obter um domínio mais adequado p/ integração, por exemplo de alguma figura bizarra p/ algo retangular e muito mais simples de integrar, mudamos o domínio de integração por meio de uma transformação (função) que leve os pontos (x, y) do domínio D para um domínio mais adequado D' de pontos (u, v)

$$\phi(u, v) = \left(x(u, v); y(u, v) \right)$$

Imaginando uma partição no domínio D' , essa partição será transmitida a D por meio da função ϕ . Uma pergunta cabível seria: qual a relação entre as duas áreas da mesma partição?

$$u \rightarrow \phi(u, v_0) = \left(x(u, v_0); y(u, v_0) \right)$$

$$\text{vetor tangente: } \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0); \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0) \right)$$

o módulo do produto vetorial é justamente a área delimitada entre os paralelogramos. Em português...

$\text{área}(\varphi(R_{ij})) \approx \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Delta v \right\|$; logo:

para infinitesimais
se aproxima
da área

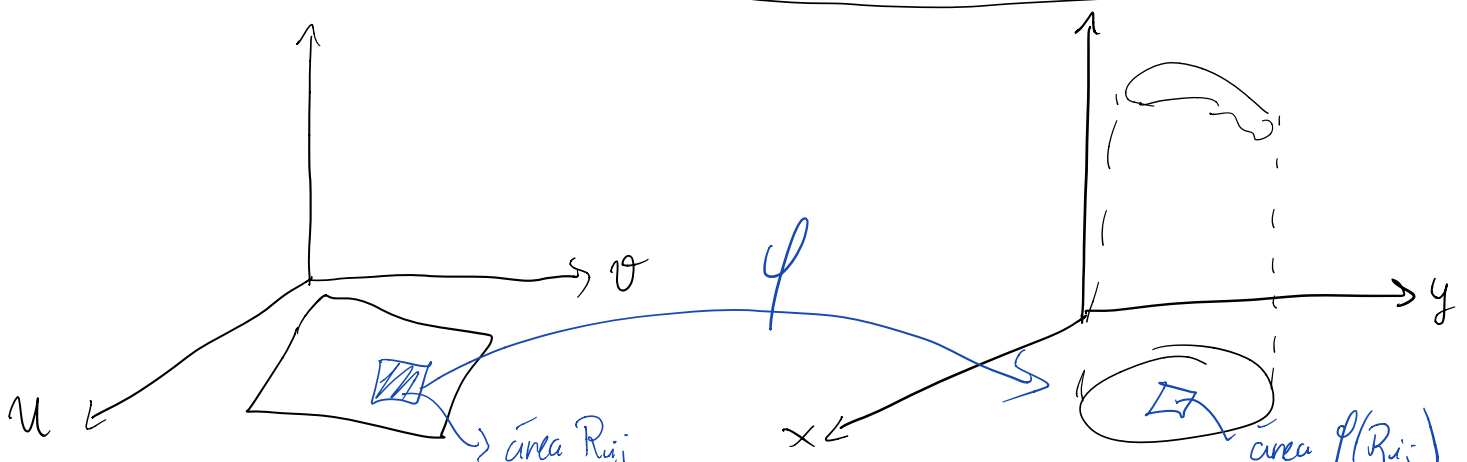
$$\boxed{\text{área}(\varphi(R_{ij})) \approx \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right\| \Delta u \Delta v}$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \underbrace{|\mathcal{J}|}_{\text{Jacobiano } (\mathcal{J})} \text{área}(R_{ij}) = \text{área}(\varphi(R_{ij}))$$

Jacobiano ($\mathcal{J}$)

Ao realizar uma mudança de variável, as áreas dadas pelas transformações realizadas pela função φ não são iguais. Para poder afirmar igualdade entre áreas, entra o papel do Jacobiano. $\hookrightarrow$ fator de correção de área

OBS: O estimador da área em xy é dada pelo vetor tangente, visto que não necessariamente trata-se de uma região inteiramente reta.



$$\iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \text{área } \varphi(R_{ij})$$

$$\approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i, v_j)) |J| \text{área } R_{ij}$$

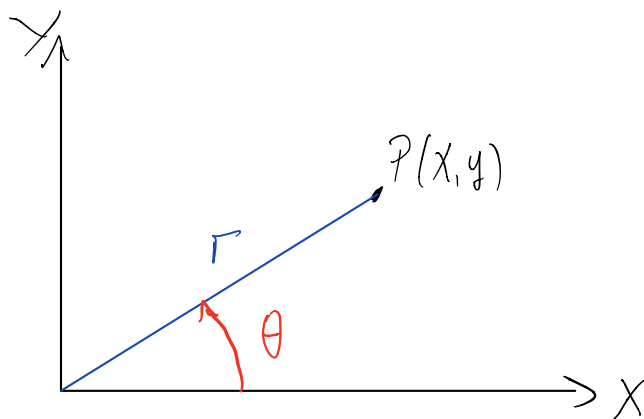
Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua; $\varphi: R \rightarrow D$

- φ é de classe C^1 , injetora
- $|J| \neq 0$ no interior de R

Então:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f(\varphi(u,v)) \cdot |J| du dv$$

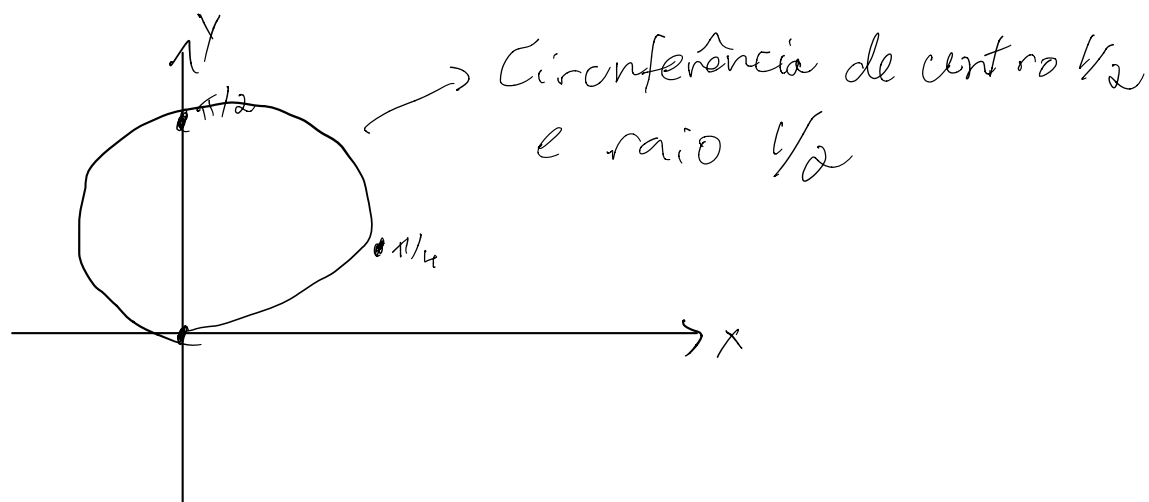
Exemplo: Coordenadas Polares (r, θ)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r \geq 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

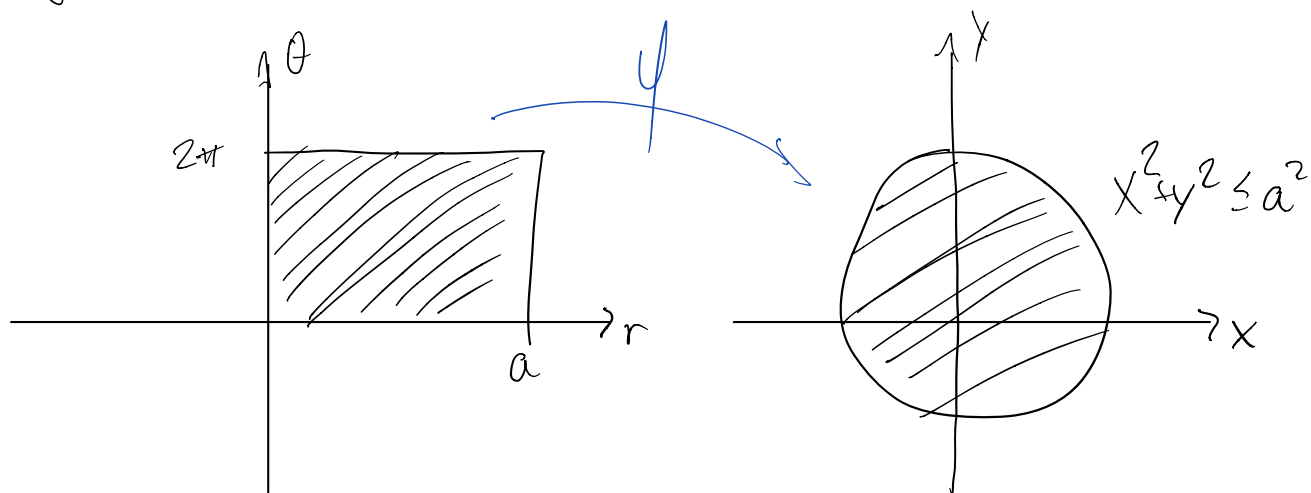
$$r(\theta) = \sin \theta$$



$$x(r, \theta) = r \cdot \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$r \geq 0$$

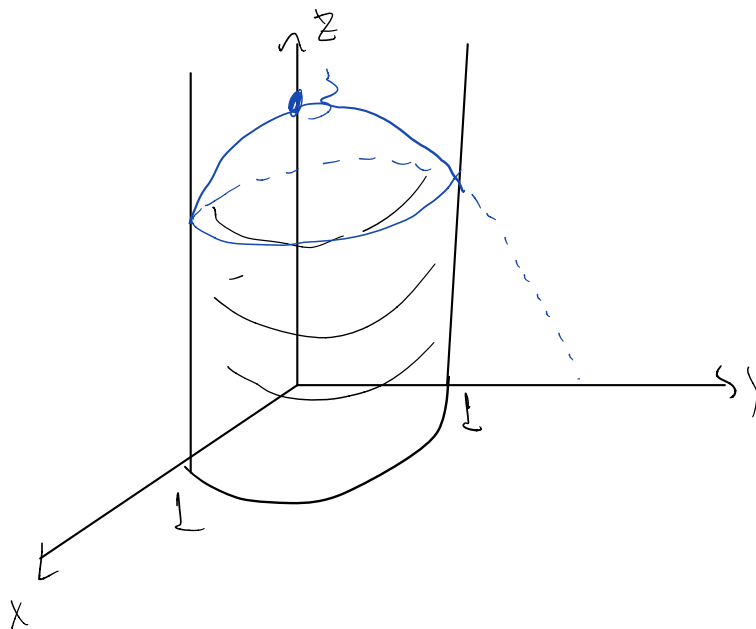
$$y(r, \theta) = r \cdot \sin \theta$$



$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1}) = \boxed{r}$$

$$\boxed{|J| = r} \quad (\text{Coordenadas Polares})$$

Ex: Calcule o volume do sólido dado por: $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$



$$0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$$

$$\iint_D (3 - x^2 - y^2) dx dy \text{ onde } D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x^2 - y^2) dy dx \quad (\text{too complex})$$

↳ mudança de variável

p/ coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

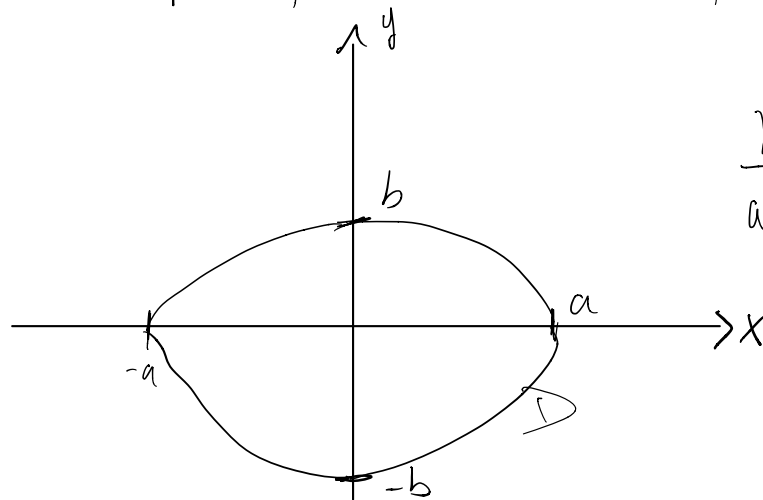
$$|J| = r$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r(3 - r^2) dr d\theta \xrightarrow{\text{Jacobiano!}} = 2\pi \int_0^1 (3r - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1$$

$$2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = 2\pi \left[\frac{5}{4} \right] \Rightarrow \underline{\underline{\frac{5\pi}{2}}}$$

Casos Particulares:

Passando uma elipse para coordenadas polares:



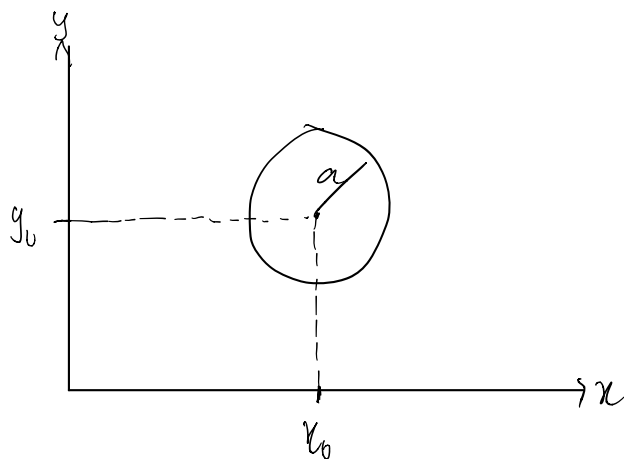
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Realizando a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos \theta \\ y = b \cdot r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{|J| = abr}$$

Logo, teremos: $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r,\theta) ab r dr d\theta$

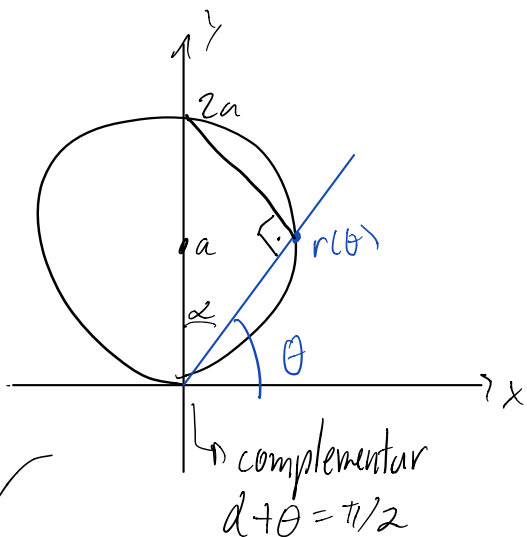
Analisando o caso de uma circunferência de centro (x_0, y_0) :



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq a^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \theta \\ y = y_0 + r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \leadsto |J| = r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \end{matrix}$$

iii-) $x^2 + (y-a)^2 \leq a^2$



duas possibilidades de mudança:

i-)
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = a + r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

desloca a origem
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq$

ii-)
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

não desloca a origem
da circunferência, logo
os extremos de θ e r
devem ser ajustados

$0 \leq \theta \leq \pi$
 $0 \leq r \leq 2a \sin \theta$

$\cos d = \frac{r \cdot (\theta)}{2a}$

$r(\theta) = 2a \cos d \Rightarrow \underline{r(\theta) = 2a \sin \theta}$ (maneira geométrica)

Método analítico $\leadsto$ jogar a mudança de variável na função.

$x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$
 $\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2}$

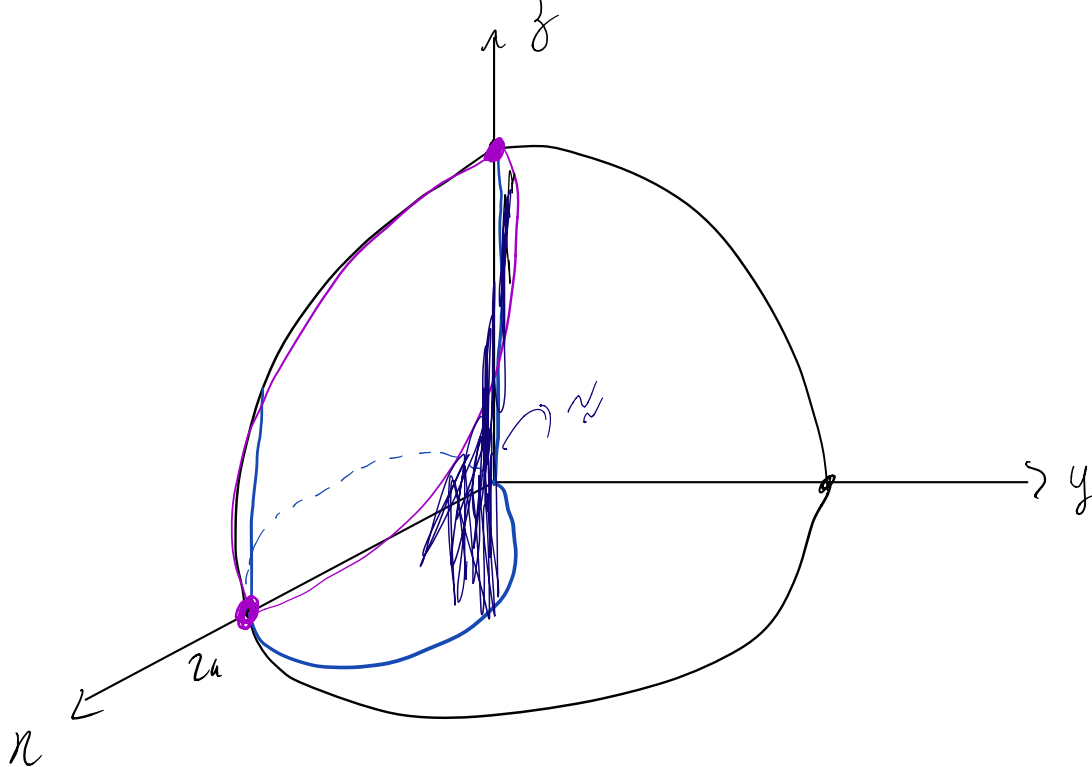
$r^2 - 2a r \sin \theta \leq 0 \leadsto \underline{r \leq 2a \sin \theta}$

Ex: Volume do sólido no interior de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ e no interior

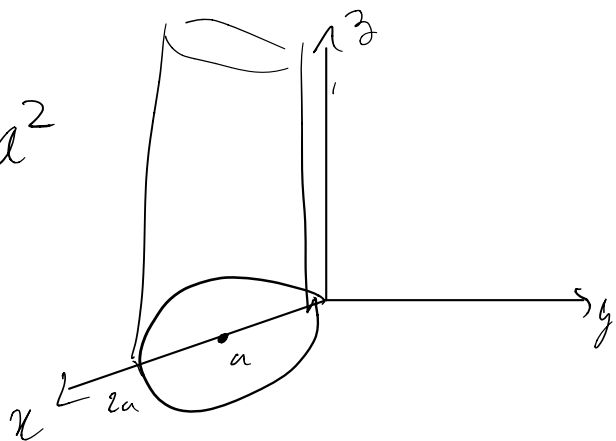
de $x^2 - 2ax + y^2 \leq 0$

z não está presente portanto
é válida $\forall z \in \mathbb{R}$

Esfera no origem
de raio $2a$.

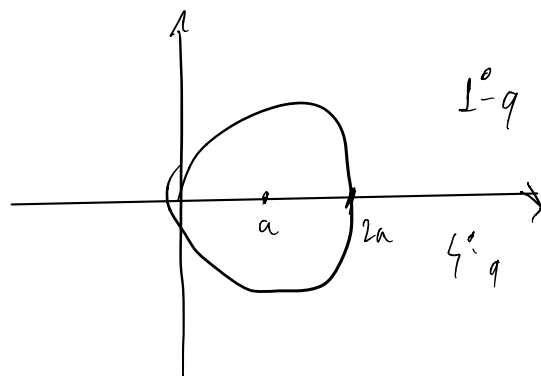


$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \leadsto (x-a)^2 + y^2 = a^2$$



a figura pega tanto no $z \geq 0$ quanto $z < 0$

$$\text{Vol} = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$



fazendo a mudança de variável:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2a \cos \theta \end{cases}$$

$|J| = r$

Com isso, a integral se transforma em:

$$2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta$$

$$4a^2 - r^2 = u$$

$$du = -2r dr$$

$$r=0 \Rightarrow u = 4a^2$$

$$r = 2a \cos \theta \Rightarrow u = 4a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta$$

$$u = 4a^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\underbrace{4a^2 \sin^2 \theta}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} \left(u^{-1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) du d\theta \right) = - \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \bigg|_{4a^2}^{4a^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(8a^3 |\sin^3 \theta| - 8a^3 \right) \frac{2}{3} d\theta = -\frac{16a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|\sin^3 \theta| - 1) d\theta$$

$$= -\frac{32a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1) d\theta \Rightarrow -\frac{32a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta - 1) d\theta$$

$$-\frac{32a^3}{3} \left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right) \bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{32a^3}{3} \left(-\cos \pi/2 + \frac{\cos^3 \pi/2}{3} - \pi/2 \right)$$

$$+ \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} + 0 \bigg) = -\frac{32a^3}{3} \left(-\pi/2 + 1 - \frac{1}{3} \right)$$

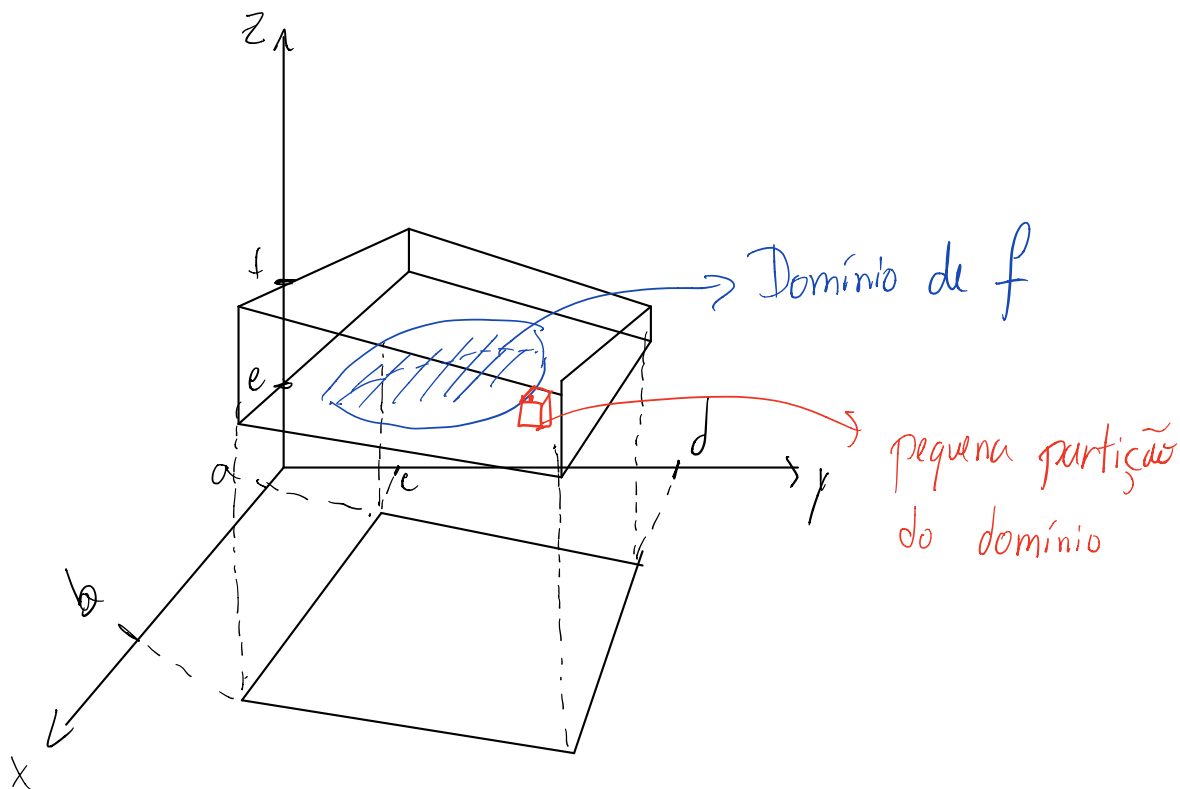
$$= \frac{32a^3}{3} \left(\pi/2 - \frac{2}{3} \right)$$

- Bonito né?

- Possani, 2015

Integrais Triplas:

$f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $\leadsto$ Imaginando f como função densidade
 $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ de um ponto no espaço.



$p = \text{partição} \rightarrow \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \text{Vol}(R_{ijk}) \approx \text{estimativa da massa}$

$\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \text{Vol}(R_{ijk})$ se a soma tiver um limite finito, então

f é integrável em D

$\hookrightarrow$

$$\iiint_D f(x,y,z) dv = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$$

A ideia é análoga a integral dupla, só que ao invés de realizar uma partição em pequenos retângulos, realizamos a partição em pequenos paralelepípedos.

Se existe $\iiint_D 1 \, dv$, então D tem volume e:

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dv$$

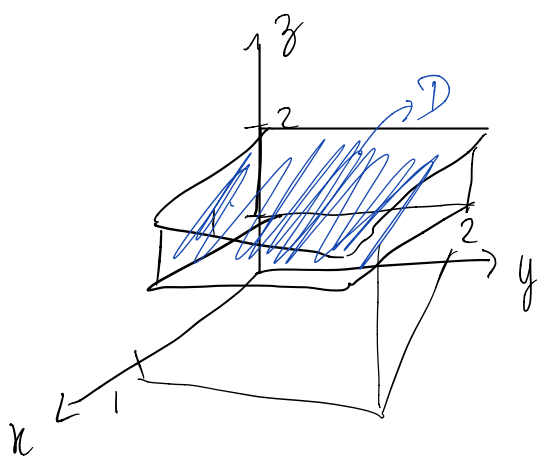
Teorema de Fubini p/ paralelepípedos:

$f: D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dv = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$$

Novamente, a ordem de integração p/ este caso $\bar{n}$ importa (necessitando apenas mudanças coerentes na integral.)

Ex: Calcule $\iiint xyz \, dv$ sobre $D = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 2]$

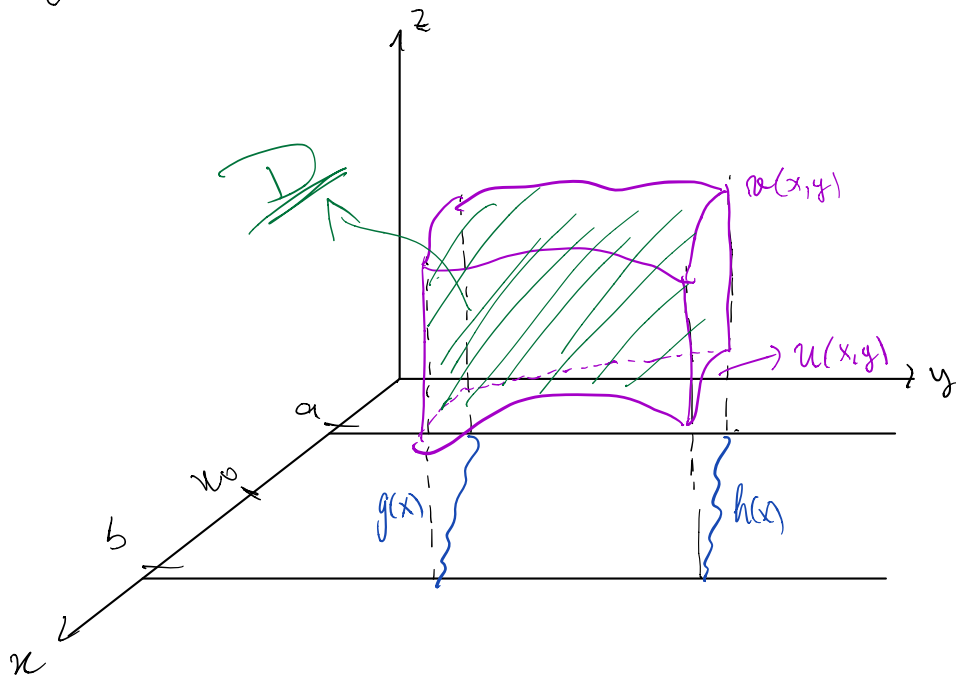


$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_1^2 \int_0^2 \frac{x^2 y z}{2} \Big|_0^1 \, dy \, dz \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \frac{y^2 z}{2} \, dy \, dz = \int_1^2 \frac{y^3 z}{4} \Big|_0^2 \, dz = \int_1^2 z \, dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{3/2}} \end{aligned}$$

Teorema de Fubini - Caso Geral:

$f: D \subset \mathbb{R}^3$, D limitado, f integrável hipótese: $\forall x_0 \in [a, b]$ existe $\int_{D_{x_0}} f(x_0, y, z) dy dz$

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq h(x); u(x, y) \leq z \leq v(x, y) \right\}$$



$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

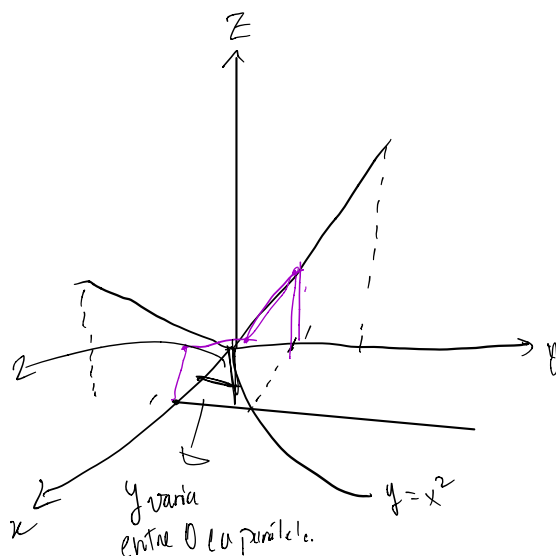
pode haver mudança na ordem.

EX: $\iiint_D y dx dy dz$

D : abaixo de $z = x + 2y$; acima de xy :

limitado: $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$

z varia entre zero e o plano $x+2y$



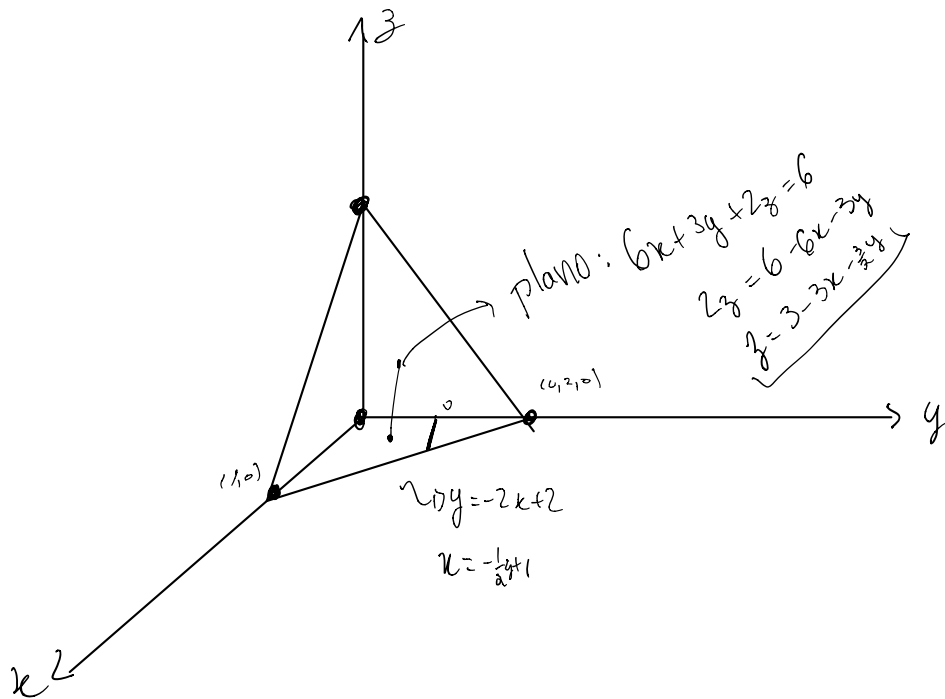
y varia entre 0 e a parábola.

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} yz \Big|_0^{x+2y} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} yx + 2y^2 dy \, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left. \frac{y^2 x}{2} + \frac{2y^3}{3} \right|_0^{x^2} = \int_0^1 \frac{x^4 x}{2} + \frac{2x^5}{3} dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^5}{3} dx = \frac{x^6}{12} + \frac{2x^6}{21} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{7+8}{84} = \frac{15}{84} = \underline{\underline{5/28}}$$

EX: Escreva a integral $\iiint f(x,y,z) dv$ V é a pirâmide de vértices $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(0,2,0)$; $(0,0,3)$



$$\int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z) \, dz \, dx \, dy$$

Mudança de Variável na Integral Tripla

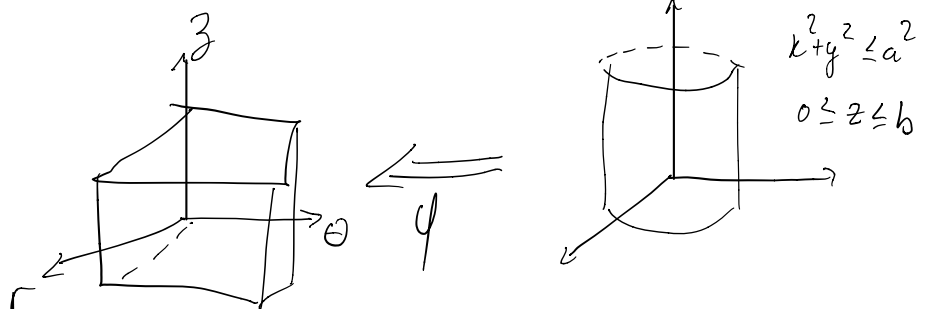
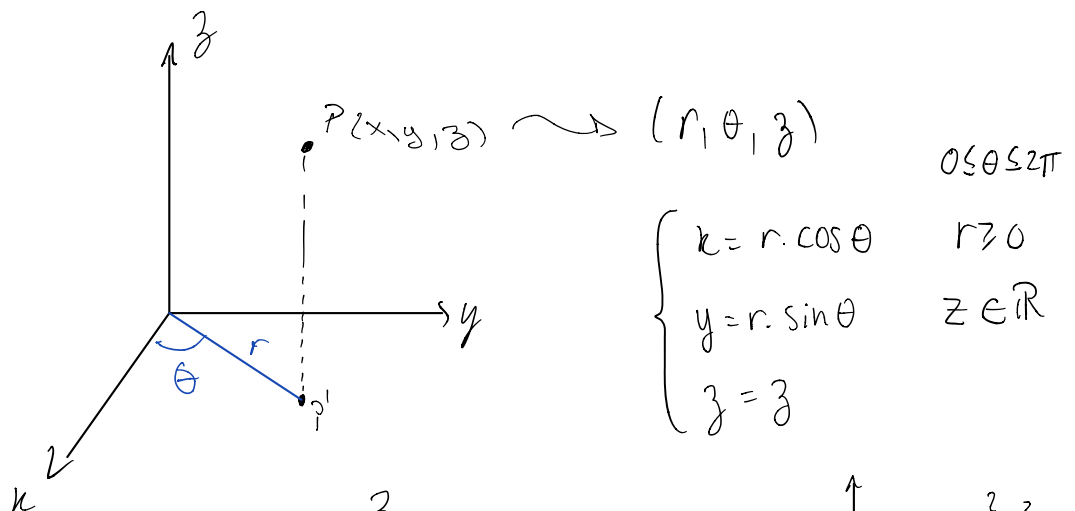
$\psi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$; funciona igualmente a integral dupla

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$\leadsto$ produto misto entre 3 vetores
 $\hookrightarrow$ correção de volume ao mudar de variável.

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_{uvw}} f(\psi(u, v, w)) |J| du dv dw$$

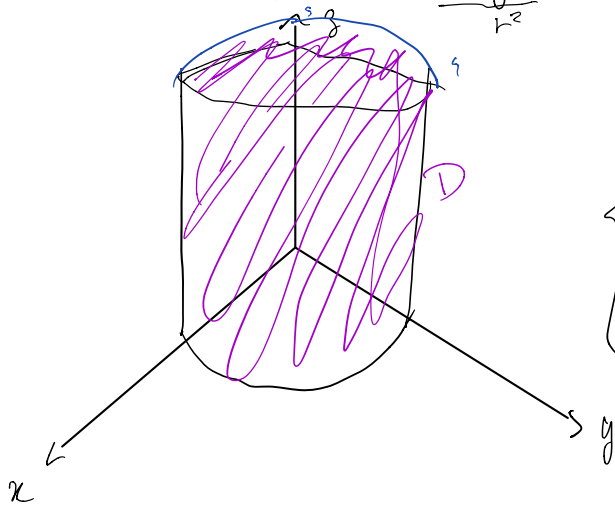
Ex: Coordenadas Cilíndricas



$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$|J| = r$$

Ex: Calcular a massa de $x^2 + y^2 \leq 1$ $0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$
com densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$

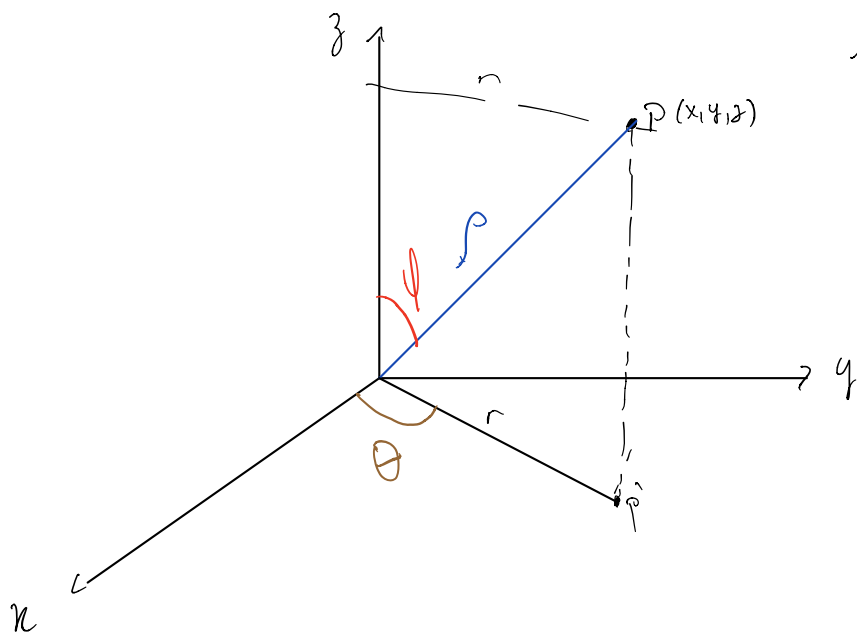


$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq 5 - r^2 \\ |J| &= r \end{aligned}$$

logo a integral ficara:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{5-r^2} r^3 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 z \Big|_0^{5-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5r^3 - r^5) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{5r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{13}{12} d\theta = \frac{13}{12} \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6} \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas:



$$\rho = d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$r = \rho \sin \phi$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \phi & \rho \sin \theta \cos \phi & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$|J| = \rho^2 \sin \phi$$

Exercício: massa de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z^2 - x^2 - y^2 \geq 0$
com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

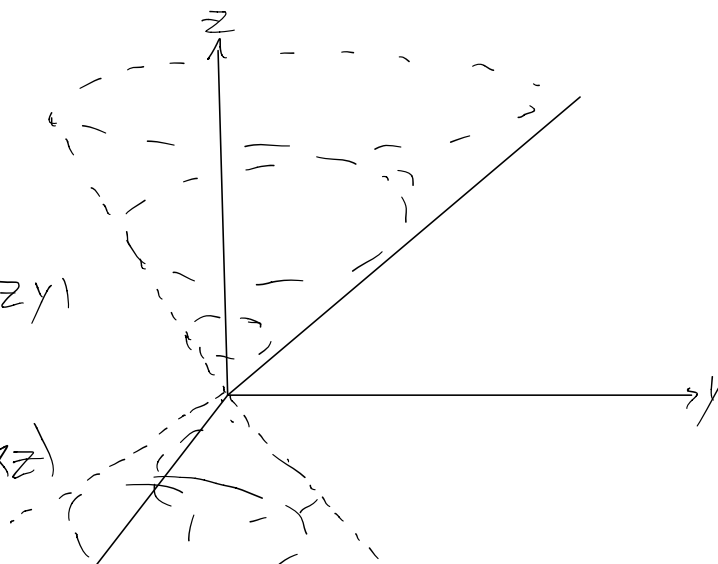
$$\text{se } x=0$$

$$z^2 = y^2 \quad z = \pm y \quad (\text{plano } zy)$$

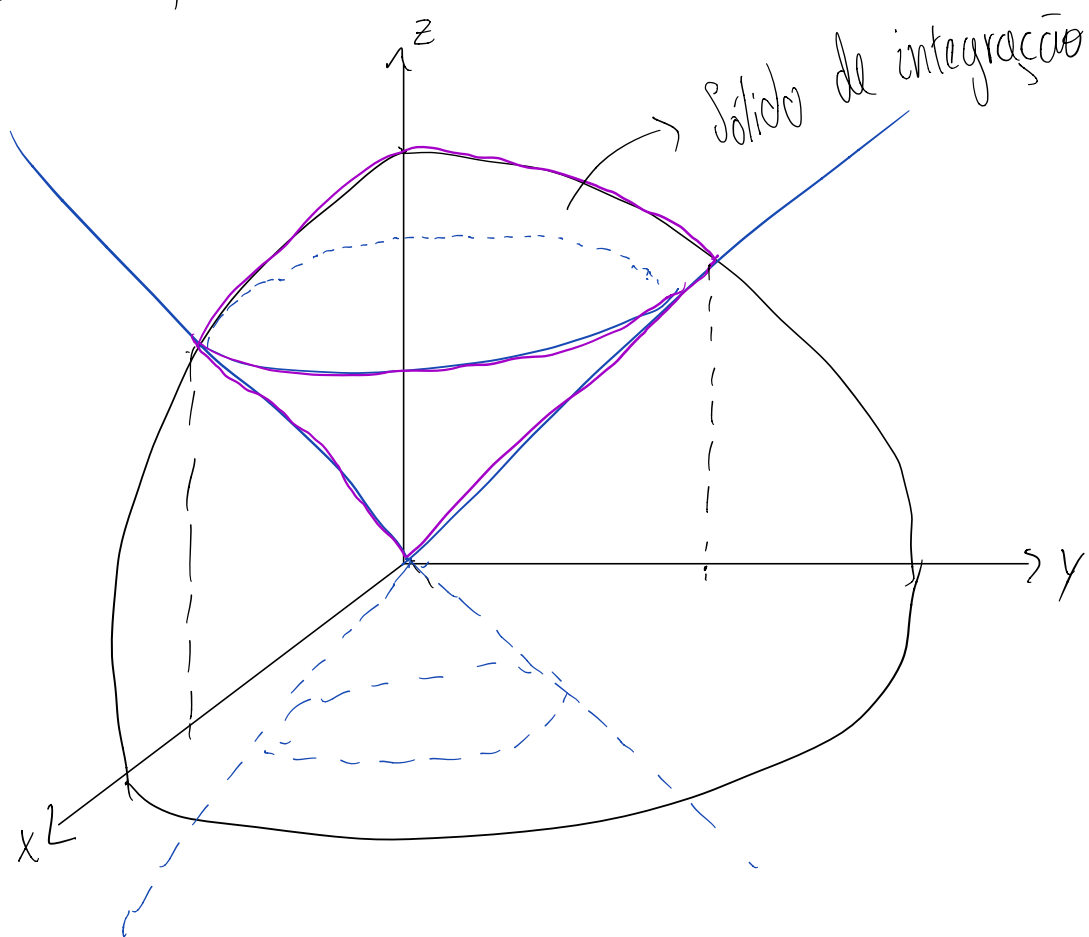
$$\text{se } y=0$$

) retas

$$z^2 = x^2 \quad z = \pm x \quad (\text{plano } xz)$$



Curvas de nível $z = \text{cte}$
 $\text{cte} = x^2 + y^2 \rightarrow \text{Circunferência}$



$$\text{Massa} = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV, \text{ passando p/ coordenadas esféricas.}$$

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/4$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x = \rho \cdot \cos\theta \sin\varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cdot \cos\varphi$$

O φ varia também de $\frac{3\pi}{4}$ até π , devido a parte inferior do cone e do z negativo que também adentra no domínio de integração. No entanto, como tudo demonstra uma certa simetria. Fazemos φ variar em $[0, \pi/4]$ e multiplicamos a massa

por um fator 2.

$$\text{Massa} = 2 \cdot \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

$$M = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \underbrace{\rho \rho^2 \sin \varphi}_{|\mathbf{r}|} d\rho d\varphi d\theta$$

$$M = 4\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \rho^3 \sin \varphi d\rho = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 d\varphi = 16\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi$$

$$-16\pi \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} = 16\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

Observações:

• Cartesianas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2) = 4 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 2 \rightarrow$ Circunferência de raio $\sqrt{2}$.

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \delta(x, y, z) dz$$

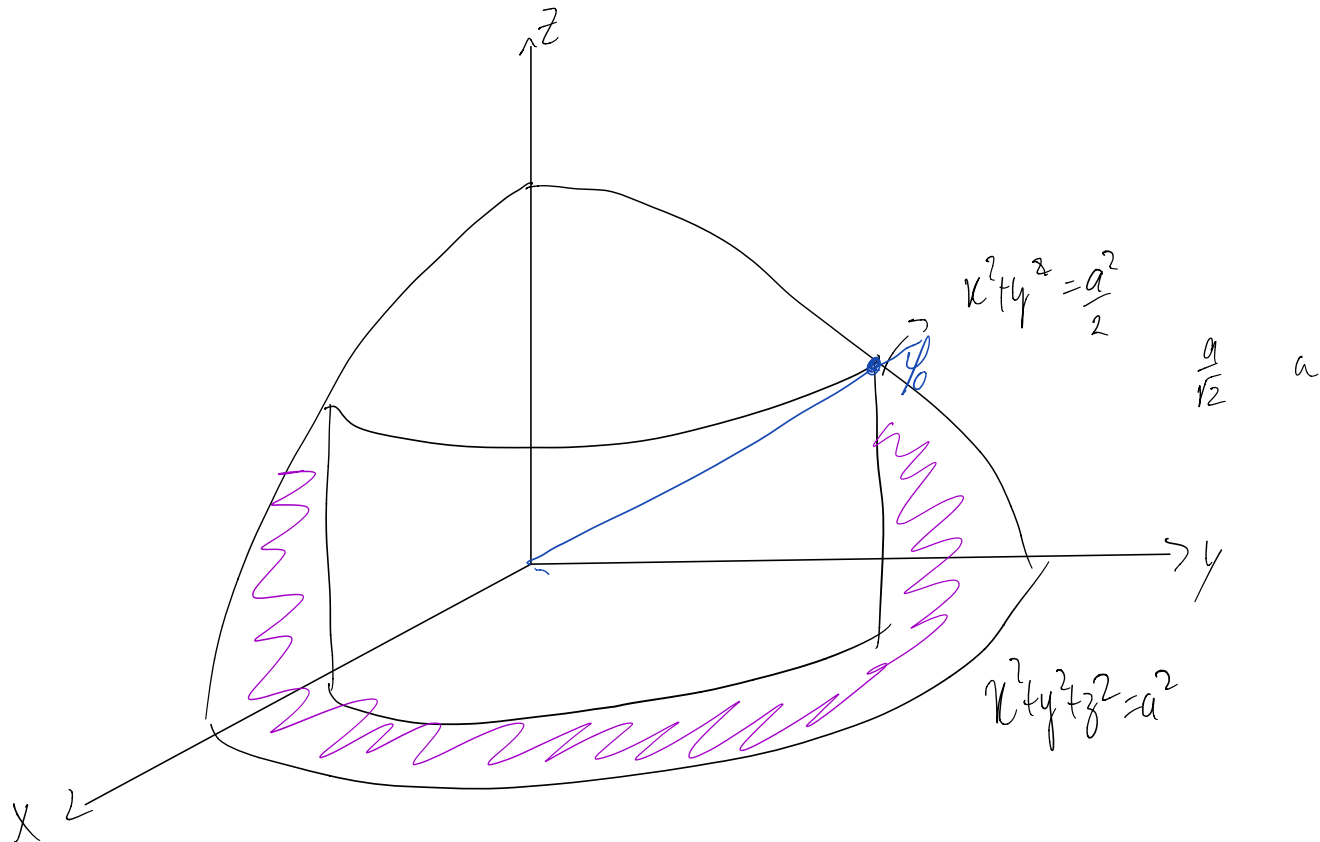
• Cilíndricas:

$$2. \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{2-r^2}} f(r, \theta, z) \cdot r \cdot dz dr d\theta$$

• Esféricas

$$2. \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\theta$$

Exercício 2- Volume de $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$
 $x^2 + y^2 \geq a^2/2$



• Cilíndricas :

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$z = z$$

$$|J| = r$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \leq r \leq a$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2} \quad (\times 2)$$

$$-\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2/2 \end{cases} \longrightarrow r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \cdot dz \cdot dr \cdot d\theta$$

NUNCA ESQUEÇA DO
JACOBIANO

• Esféricas :

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$|J| = \rho^2 \sin \varphi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \csc \varphi \leq \rho \leq a$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \longrightarrow \rho^2 \sin^2 \varphi = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \csc \varphi}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\frac{a}{\sqrt{2}} \csc \varphi}^a \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

parametrização:

$$x = a \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = b \rho \sin \varphi \sin \theta$$

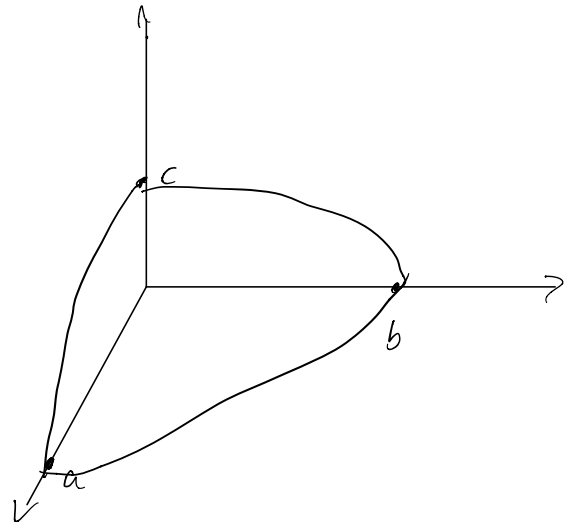
$$z = c \rho \cos \varphi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

} igualmente ao plano.



$$|J| = abc \rho^2 \sin \varphi$$

$$Vol = \iiint_V 1 \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 abc \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi abc}{3} \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi abc}{3} \left(-\cos \varphi \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{2\pi abc}{3} \left(\underbrace{-\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_1 \right) = \frac{4\pi abc}{3}$$

Integral de Linha:

Curvar no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- propriedade / lugar geométrico
- equação geral
- Parametrizações

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2 \longrightarrow \gamma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t)$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

↳ é possível aplicar o cálculo diferencial e integral a curvas parametrizadas.

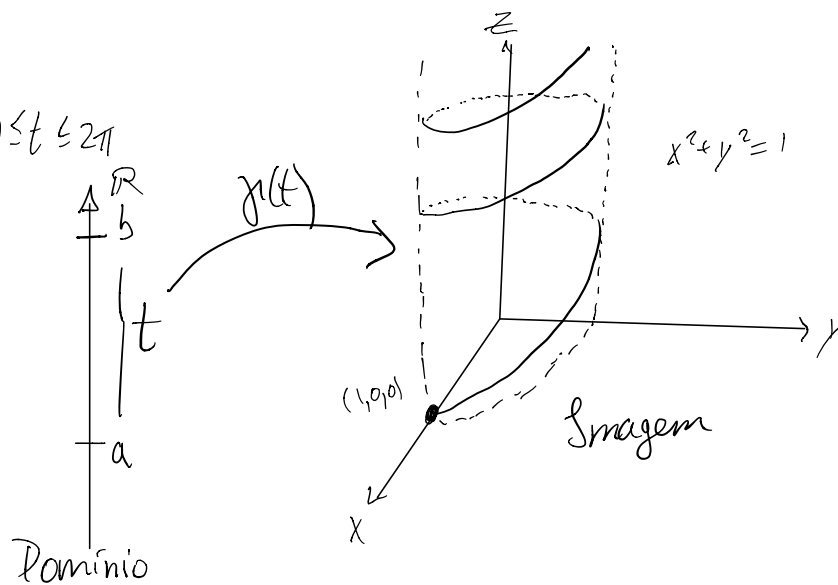
DEF: $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$)
chama-se curva parametrizada.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) ; \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Vamos assumir γ é de classe C^k

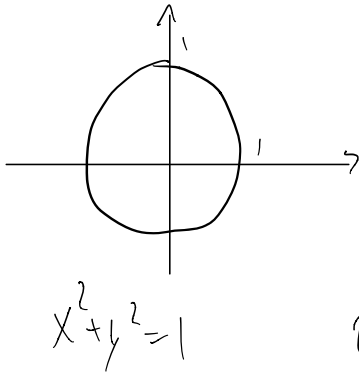
1-) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

2-) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$



DEF: Traço de uma curva é a sua imagem. $\gamma = \gamma([a, b])$

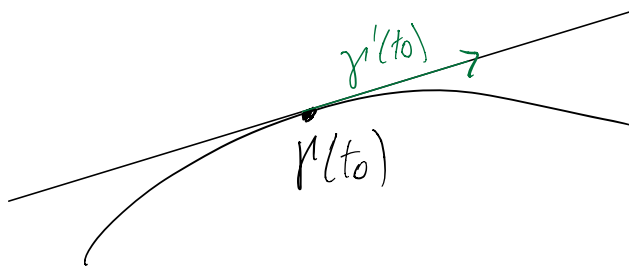
3-)



i-) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ↻
ii-) $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ ↺

uma parametrização adiciona um sentido de percurso e ponto inicial.

DEF: reta tangente à γ em $\gamma(t_0)$



$X: X(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0); \lambda \in \mathbb{R}$
desde que $\gamma'(t_0) \neq 0$

DEF: γ é uma curva regular se $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

DEF: um ponto múltiplo de γ é um ponto A tal que existam $t_1 \neq t_2$ e $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$

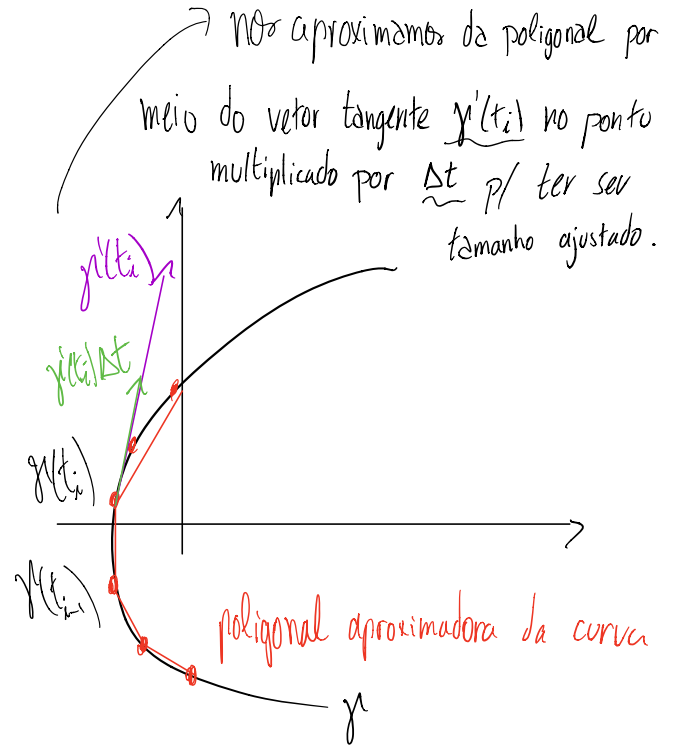
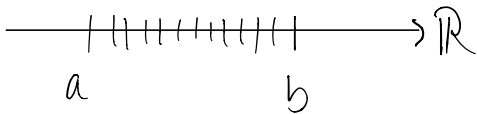
DEF: γ é uma curva simples se não possui ponto múltiplo.

DEF: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$ é fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$; ponto inicial e final coincidem.

DEF: Curva fechada simples é aquela em que o único ponto múltiplo é $\gamma(a) = \gamma(b)$

Comprimento de Arco:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$$

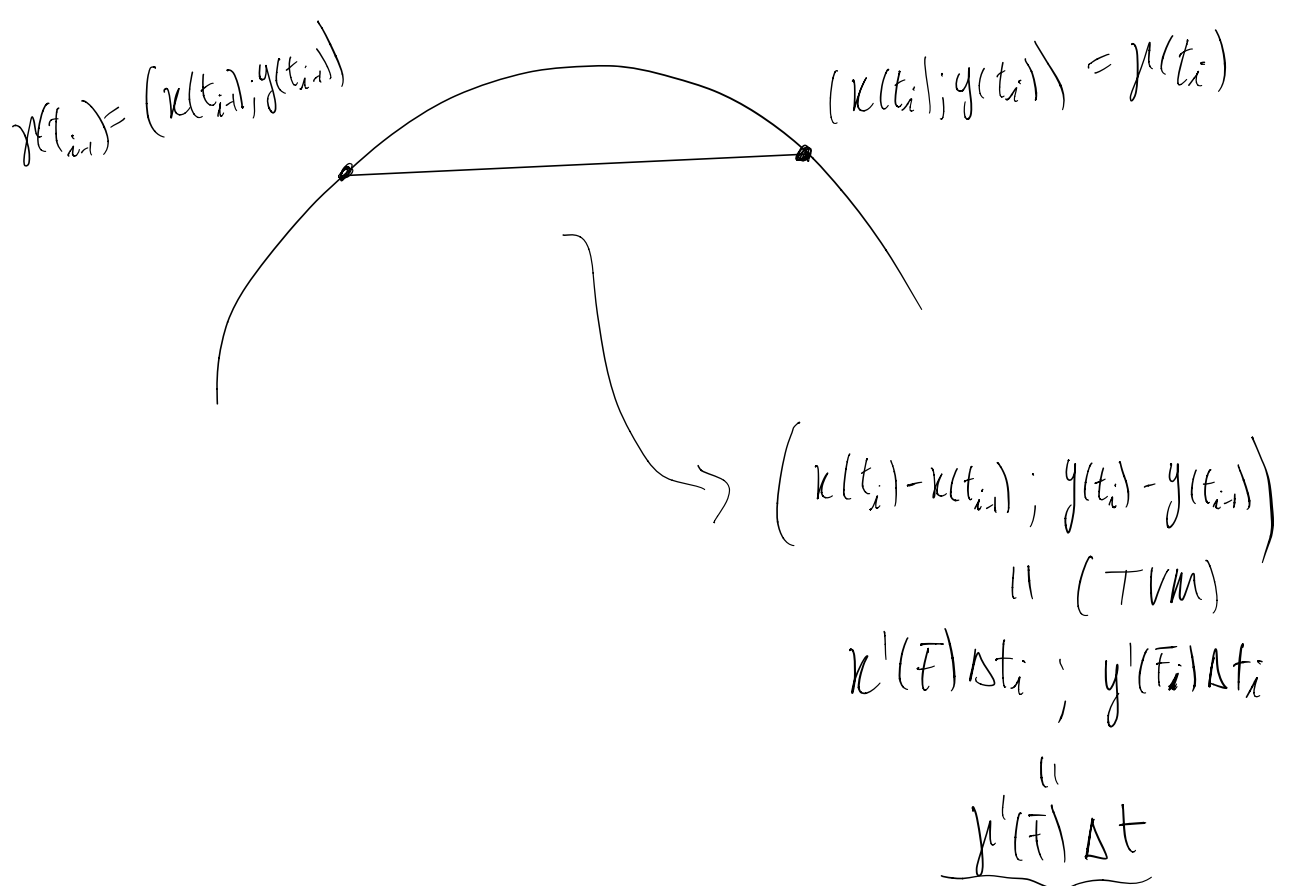


$$l(P_n) = \sum_{i=1}^n \text{Cordas}(\overline{P_{i-1}P_i}) \approx \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_i)\| \Delta t_i$$

fazendo $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_i \|\gamma'(t_i)\| \Delta t = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = s(t)$

$$s(t) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Comprimento de arco



DEF: $\ell(\gamma) = \int_{\gamma} \perp ds = \int_a^b \parallel \gamma'(t) \parallel dt$

MASSA:
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{z(z)}$ regular.

papel do Jacobiano
que transforma o comprimento
 ab em $\ell(\gamma)$

$\delta(x, y)$ densidade linear de γ .

$$\text{Massa} = \int_{\gamma} \delta(x) ds = \int_a^b \delta(x) \parallel \gamma'(x) \parallel dx$$

Mais geral:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \|\gamma'(s)\| ds$$

Ex: Comprimento de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
↪ hélice.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

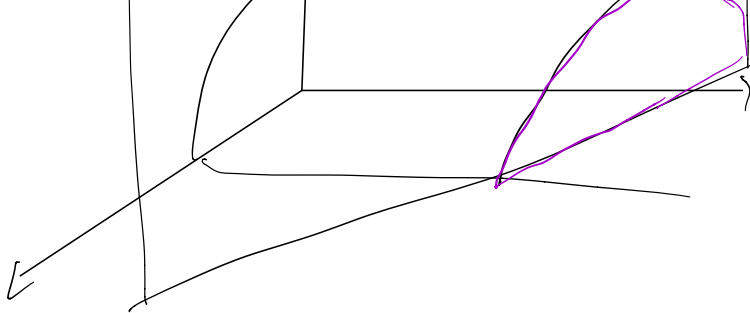
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$l = \int_{\gamma} 1 dx = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \underline{2\pi\sqrt{2}}$$

OBS: Sempre ao trabalhar com uma curva para a integral de linha, ela deve estar parametrizada.

2-) Calcule a massa da curva intersecção $x^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$
com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$





$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$x^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ Circunferência no plano XZ ao parametrizando temos que 'qualquer ponto' esteja no cilindro. Fazendo agora y respeitar a equação do plano, temos então a parametrização da região de interseção.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \sin t, \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$\text{Massa} = \int_{\gamma} \delta(t) \, dt = \int_a^b \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \sin^2 t \, dt = 2\pi + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \quad \begin{cases} \cos^2 + \sin^2 = 1 \\ \cos^2 - \sin^2 = \cos 2\theta \end{cases}$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \, dt = 2\pi + \pi - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2} \, dt = 3\pi - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi}$$

$$3\pi - \frac{\sin(4\pi)}{4} + \frac{\sin(0)}{4} = 3\pi$$

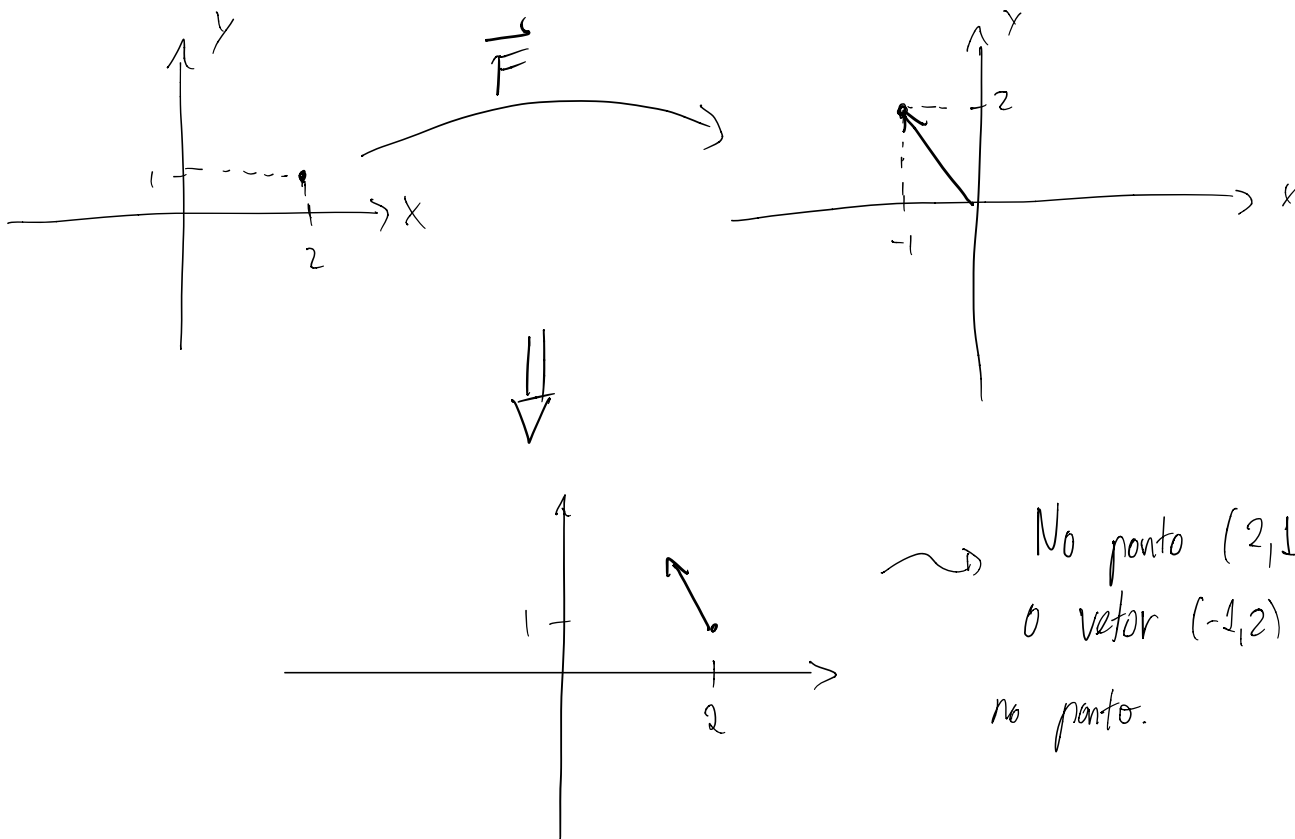
Integrais de linha de Campos Vetoriais

Campo Vetorial:

$$F: D \subset \mathbb{R}^{2(3)} \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$$

D : aberto

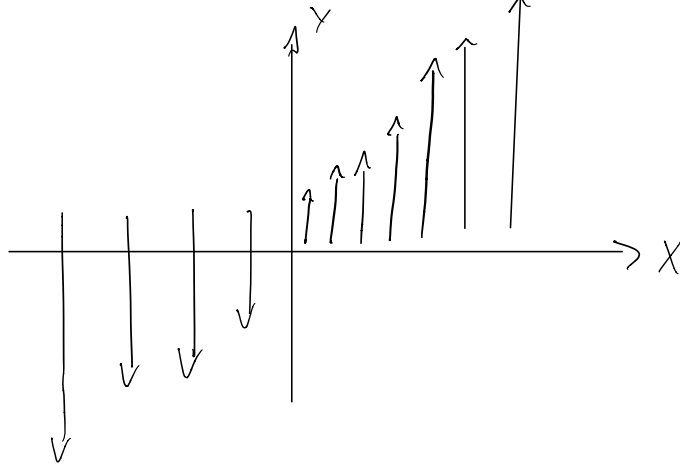
Ex: $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$



→ No ponto $(2,1)$ temos
o vetor $(-1,2)$ aplicado
no ponto.

Ex: $\vec{r} = r(x,y) = (x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$; $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ex: $F(x,y) = (0, x)$



Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (função escalar)

$$\text{Gradiente de } f = \vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- $\perp$ as curvas de nível
- dá a direção de maior variação da função.

Rotacional de um campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)) \text{ diferenciável.}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

obs: $\vec{F}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ex3-) $\vec{F}(x,y) = (0, k)$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{k}$$

Ex-) $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

obs: $\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \text{trajetórias circulares}$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \left(\frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2 + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k}$$

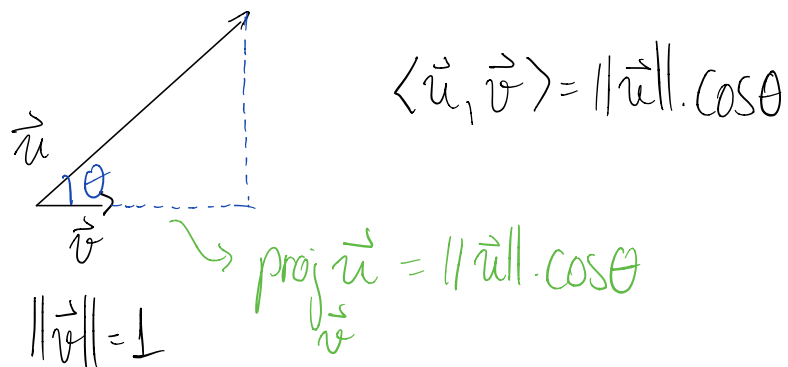
$$= \left(\frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = 0 \vec{k}$$

Rotacional mede a tendência local de um objeto (extenso) a rotacionar em torno de seu próprio eixo (velocidade angular).

Integral de linha de Campo Vetorial

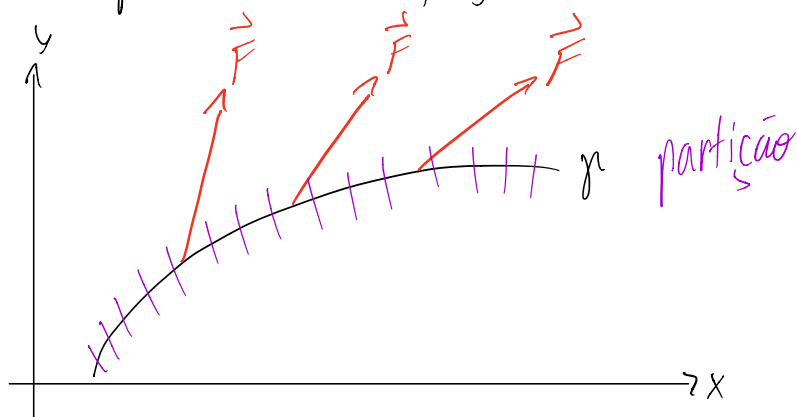
obs:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$



$\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ trajetória

$\vec{F}$, campo vetorial de forças atuando em γ .



Trabalho é a força (componente tangencial) vezes a distância percorrida. A distância será um pedaço do arco, logo $\|\gamma'(t)\| dt$.

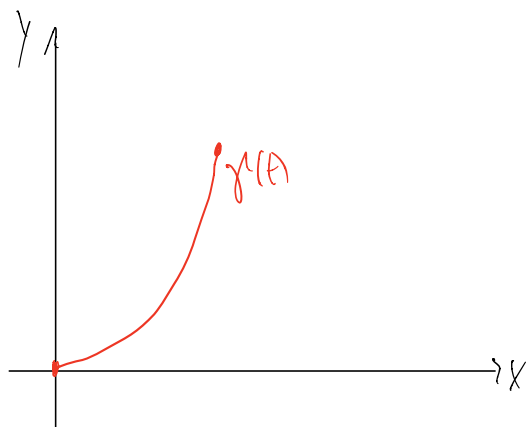
A componente tangencial da força $\vec{F}$ podemos obter pelo produto escalar de $\vec{F}$ com $\gamma'(t)$ (normalizado para conseguir o tamanho da projeção da força no arco de γ).

$$\sum_i \underbrace{\left\langle \vec{F} \cdot \frac{\vec{y}'(t_i)}{\|\vec{y}'(t_i)\|} \right\rangle}_{\text{Componente tangencial}} \underbrace{\|\vec{y}'(t_i)\| dt}_{\text{distância}} \approx W \rightarrow \text{Trabalho}$$

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Integral de linha de Campo Vetorial do tipo trabalho.

Ex:) $\vec{F}(x,y) = (x,y)$; $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2$ Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$



$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^2 (t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^2 t + 2t^3 dt = \left. \frac{t^2}{2} + \frac{2t^4}{4} \right|_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Ex:) $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

$\gamma: x^2 + y^2 = a^2$, ($a > 0$) $\rightarrow$ é preciso parametrizar a curva
Sentido horário.

$$\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{r}'(t) = (a \cos t, -a \sin t)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-a \cos t, a \sin t)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = (-a \cos t, a \sin t) \cdot (a \cos t, -a \sin t)$$

$$= -a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t = -a^2$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -a^2 dt = \underline{-2\pi a^2}$$

Notação: $\int_a^b \langle \vec{F}, \vec{r}' \rangle dt = \int_a^b \langle (P, Q) \cdot (x', y') \rangle dt = \int_a^b P x' dt + Q y' dt$

$$= \int_{\gamma} P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

Ex-) $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ $\gamma: x^2+y^2=a^2, a>0$
 Sentido anti-horário.
 (Campo $d\theta$)

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \sin t}{a^2} \cdot (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} \cdot a \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{1} dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} dt = \underline{2\pi}$$

Circuitação $\leadsto$ integral sobre uma curva fechada.

Campos Conservativos

DEF: $\vec{F}(x, y, z)$ é conservativo se satisfizer qualquer uma das 3 condições:

1-) $\exists \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\vec{\nabla} \varphi = \vec{F}$
 $\text{dom } \varphi = \text{dom } \vec{F}$
 φ chama-se "potencial"
 $\vec{F}$ chama-se "campo gradiente"

Ex:) $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ é gradiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

A função potencial é $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$

2-) $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ não depende de γ , só depende de $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ (extremos)
independência do caminho.

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Trabalho realizado é a diferença de potencial

3-) $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0$ (integral de linha sobre uma curva fechada é nula.)

1 $\Rightarrow$ 2

$\exists \varphi$ com $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$

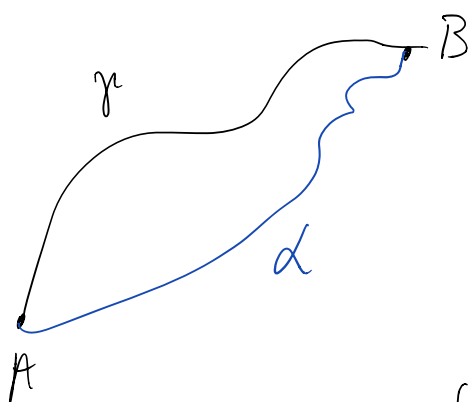
(Regra de
Cadeia)

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \gamma' dt = \int_a^b \vec{\nabla} \varphi \cdot \gamma' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi \circ \gamma) dt = \varphi \circ \gamma \Big|_a^b$$

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

2 $\Rightarrow$ 3 Como $\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0$

3 $\Rightarrow$ 2



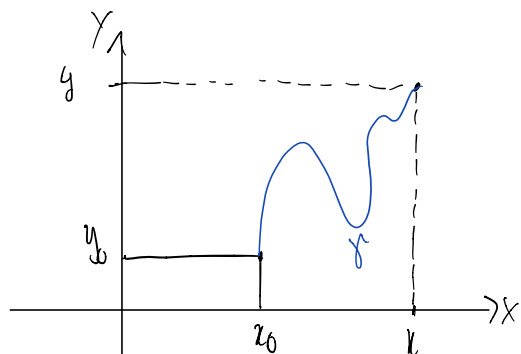
$\gamma \cup (-\alpha)$ é fechada

$$\int_{\gamma \cup (-\alpha)} \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_{-\alpha} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{-\alpha} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$$

2 $\Rightarrow$ 1

Fixamos $(x_0, y_0) \in \text{domínio}$, Tomo (x, y) qualquer



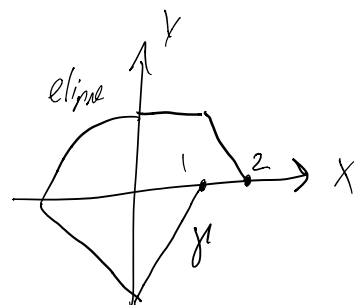
$\phi(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$, onde γ é uma curva qualquer
saíndo de (x_0, y_0) e terminando em (x, y)

Falta provar que $\vec{\nabla} \phi = \vec{F}$

Ex:

$$\int_{\gamma} \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy \text{ onde } \gamma \text{ é a curva:}$$

Campo Conservativo.



$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$, pois o campo é conservativo, logo
a integral de linha se reduz somente
a diferença de potencial.

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\gamma(b) = (1, 0) = 0$$

$$\gamma(a) = (2, 0) \quad \frac{1}{2} \ln 4$$

Ex-) Calcule $\int_{\gamma} (e^y \sin x + x e^y \cos x) dx + x e^y \sin x dy$

onde γ é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = -\ln 2$$

Se o campo for conservativo, então:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^y \sin x + x e^y \cos x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x e^y \sin x \quad \leadsto \text{integrando em } y \text{ (simplesmente pela integral ser mais simples)}$$

$$\varphi'(x, y) = \int x e^y \sin x \, dy \Rightarrow \varphi'(x, y) = x e^y \sin x + g(x)$$

Comparando $\varphi'(x, y)$ encontrado com $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ temos:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = e^y \sin x + x e^y \cos x + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow \underline{g(x) = \text{cte}}$$

Logo o campo é conservativo e possui potencial $\varphi(x, y) = x e^y \sin x$
portanto $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Teorema: $\vec{F}$ é de classe C^2
 $\vec{F}$ conservativo $\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$ $\rightarrow$ a recíproca não é válida

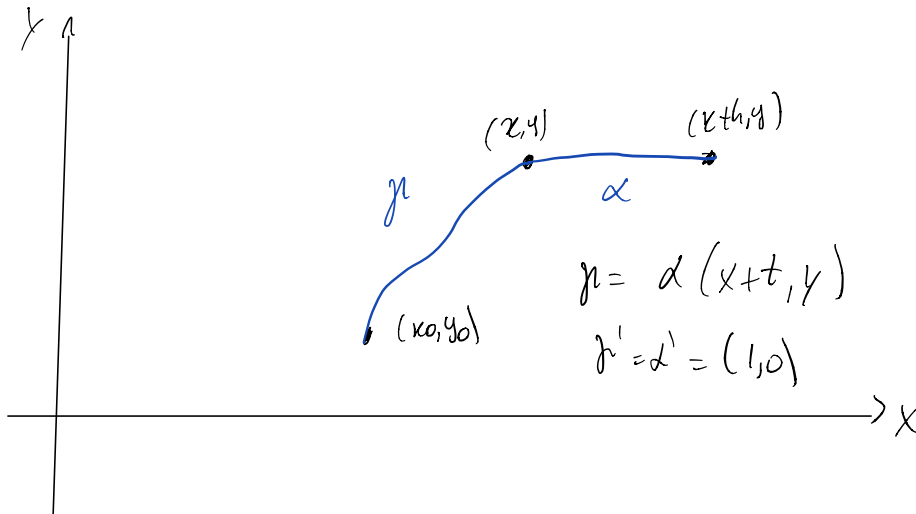
Operador diferencial $\rightarrow$ função que atua sobre funções

2 $\Rightarrow$ 1

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P dx + Q dy$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0, y_0}^{x+h, y} \vec{F} d\vec{r} - \int_{x_0, y_0}^{x, y} \vec{F} d\vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y)}^{(x+h, y)} \vec{F} d\vec{r}}{h}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h P dx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Ph}{h} = P$$

Teorema de Green:

$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
de classe C^1

$$\vec{F} = (P, Q)$$

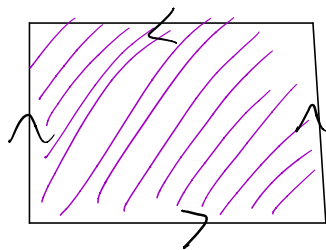
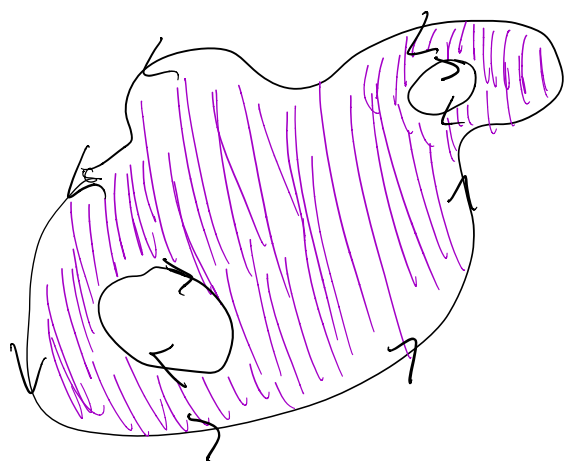
D : fechada, limitada, com fronteira, ∂D , formada por um número finito de curvas fechadas, simples, regulares por partes, disjuntas e orientadas positivamente.

fronteira de um conjunto

Então:

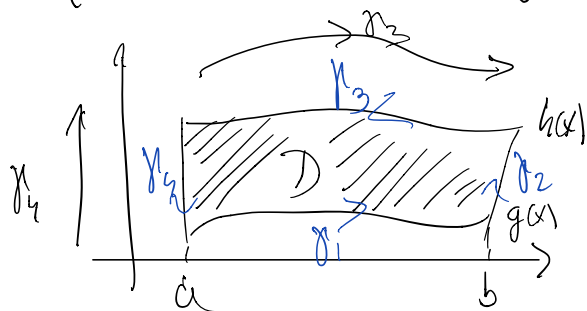
$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

(Teorema de Green)



Orientação positiva: a região D fica à esquerda quando percorremos ∂D .

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



$$\int_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$\textcircled{1} \iint_D + \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} + \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P \Big|_{g(x)}^{h(x)} dx = \int_a^b P(x, h(x)) - P(x, g(x)) dx$$

$$\textcircled{2} \int_{\partial D} P dx = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx - \int_{\gamma_3} P dx - \int_{\gamma_4} P dx$$

$\underbrace{\gamma_3, \gamma_4}_{\text{sentidos contrários devido a facilidade de parametrização.}}$

$$\gamma_1(t) = (t, g(t)) \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_2(t) = (b, t) \quad g(b) \leq t \leq h(b)$$

$$\gamma_3(t) = (t, h(t)) \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_4(t) = (a, t) \quad g(a) \leq t \leq h(a)$$

$$\int_{\partial D} P dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt + \underbrace{0}_{\gamma_2} - \int_a^b P(t, h(t)) dt + \underbrace{0}_{\gamma_4} = \int_a^b P(t, g(t)) - P(t, h(t)) dt$$

Comparando $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ temos:

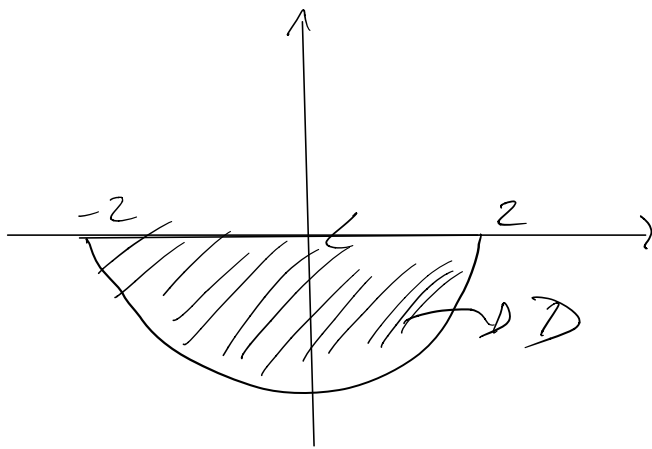
$$\int_{\partial D} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

orientação positiva: base $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ $\rightarrow$ tangente. positiva

Ex: $\int_{\gamma} \cos x dx + (2y^{\cos y} + k) dy$

Onde γ é a reunião da parte de $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ reunido com o segmento que liga $(2,0)$ a $(-2,0)$ percorridos no sentido anti-horário.

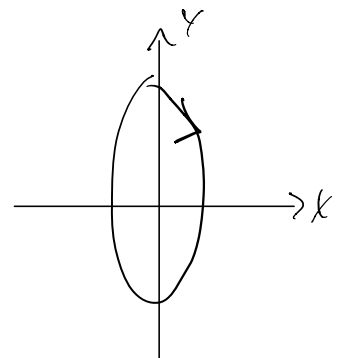
$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = (1 - 0) \vec{k} = \underline{\vec{k}}$$



Pelo Teorema de Green: $\iint_D 1 dA = \text{área}(D) = \frac{\pi r^2}{2} = \underline{2\pi}$

Ex: $F(x,y) = (x^2 - y) \vec{i} + ((\sin^2 y)^{\cos y} + k) \vec{j}$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} \quad \gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{Sentido horário.}$$



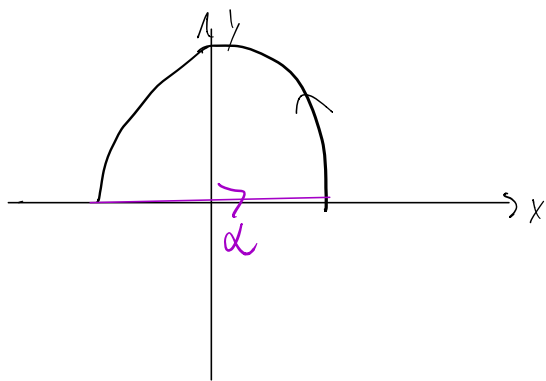
$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 1 - (-1) = \underline{2\vec{k}}$$

Pelo Teorema de Green $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \vec{\nabla} \wedge \vec{F} dA$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = - \iint_D 2 dA \Rightarrow -2 \underbrace{\text{área}(D)}_{\pi ab} = -2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 3 = -12\pi$$

Ex-1) Calcule $\int_{\gamma} (x^6 - y) dx + (\sin^2 y \cos y + x^2) dy$

γ : arco de $y = 4 - x^2$, $y \geq 0$, ligando $(-2, 0)$, $(2, 0)$



$dU(\gamma) \rightarrow$ Curva fechada
logo se pode aplicar
o Teorema de Green

$$\text{rot } \vec{F} = (2x + 1) \vec{k} \neq 0$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, a região cujo bordo é $dU(\gamma)$, logo, pelo teorema de Green:

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} - \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

$$\alpha(t) = (t, 0) \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\alpha'(t) = (1, 0)$$

$$1) \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{-2}^2 t^6 dt = 2 \cdot \int_0^2 t^6 dt = 2 \cdot \left. \frac{t^7}{7} \right|_0^2 = \frac{2 \cdot 2^7}{7} = \frac{2^8}{7} = \frac{256}{7}$$

$$2) \iint_D (2x+1) dA = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} (2x+1) dy = \int_{-2}^2 dx \left. x^2 + y \right|_0^{4-x^2} = \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 + 4-x^2 dx$$

$$\int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4 + 4 - x^2) dx \Rightarrow \int_{-2}^2 (20 - 9x^2 + x^4) dx \Rightarrow \frac{32}{3}$$

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \frac{256}{7} - \frac{32}{3}$$

Ex-) Calcule $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$, sendo

$$1-) \gamma: x^2+y^2=a^2, \text{ sentido anti-horário}$$

$$\gamma: \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

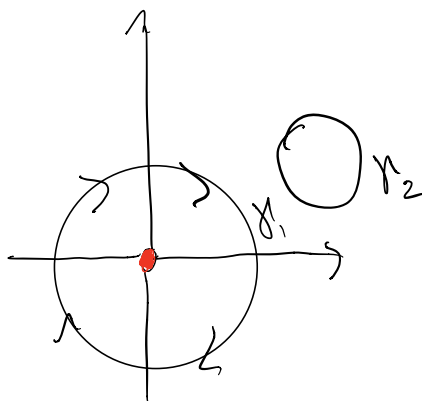
$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t)}{a^2} + \frac{(a \cos t)(a \cos t)}{a^2} dt = 2\pi$$

obs: $\text{rot } \vec{F} = 0$

DOMÍNIO

$$\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

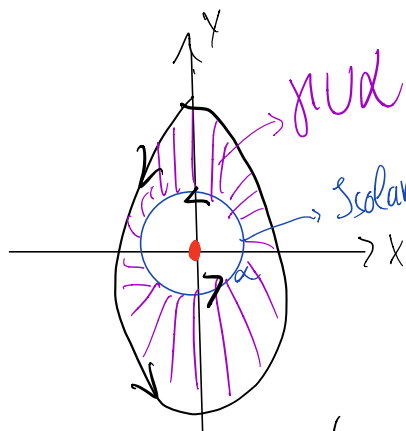


2-) $\gamma: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$, sentido horário

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \underbrace{\int_{\text{int}(\gamma)}^{\text{Green}} \text{rot } \vec{F}}_{\text{int}(\gamma)} = \iint_{\text{int}(\gamma)} 0 = 0$$

Isso é possível somente pois o interior da curva encontra-se inteiramente no domínio do campo $\vec{F}$.

3-) $\gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, sentido anti-horário.



Seja:

$$\partial D = \gamma_{UD}$$

↪ sentido horário



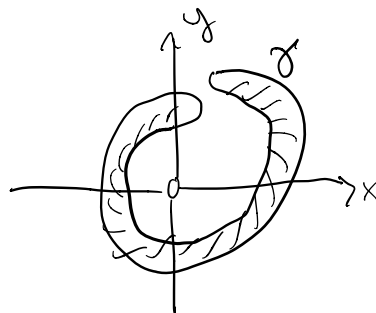
Podendo-se aplicar o teorema de Green temos:
(figura fechada)

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \iint \text{rot } \vec{F} dA$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \underbrace{\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}}_{-2\pi} = \iint_D \cancel{\text{rot } \vec{F}}^0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi$$

4-) $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ onde γ é uma curva fechada simples que não passa pela origem, orientada no sentido anti-horário.

a-) γ não envolve a origem



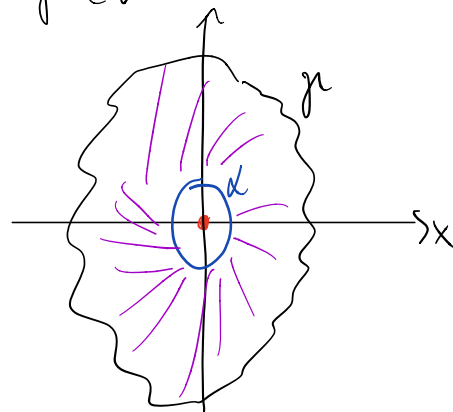
$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\text{int}(\gamma)} \text{rot } \vec{F} = 0$$

O teorema de Green é aplicado na região entre γ e α .

b-) γ envolve a origem:

Tomamos $\alpha: x^2 + y^2 = \epsilon^2$ horário

com a pequena p/ que $\gamma \cap \alpha = \emptyset$



Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial D = \gamma \cup \alpha$, Pelo teorema de Green:

$$\int_{\gamma \cup \alpha} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \underbrace{\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}}_{-2\pi} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi$$

DEF: $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio Simplesmente Conexo se toda curva fechada em D poder ser contraída a um ponto em D .

Teorema: $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Campo vetorial

D é simplesmente conexo

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

Então: $\vec{F}$ é Conservativo

demonstração: γ curva fechada qualquer, $\gamma \subset D$, D simplesmente conexo

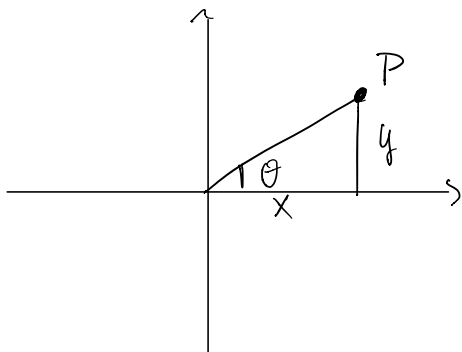
$$\Rightarrow \text{int}(\gamma) \subset D$$

$$\Rightarrow (\text{Teorema de Green}) \quad \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} dA$$

por hipótese: $\text{rot } \vec{F} = 0$ $\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma$ fechada, logo

$\vec{F}$ é conservativo.

Ex $\varphi(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \underline{\underline{\frac{-y}{x^2 + y^2}}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad | \quad \text{dom } \varphi = \mathbb{R} - \{eixo y\}$$

$$\phi_1(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta \text{ (coordenadas polares)}$$

$$\vec{\nabla}\phi_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \vec{F}$$

$$\text{dom } \phi_1 = \mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } y\}$$

$\vec{F}$ não possui um potencial definido em seu domínio ($\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$) entretanto partes de seu domínio acabam sendo simplesmente conexo o que leva a uma função potencial parcial.

$$\phi_2 = -\arctg\left(\frac{x}{y}\right)$$

↳ O mesmo campo $\vec{F}$ pode ter inúmeras funções potenciais com domínios diferentes

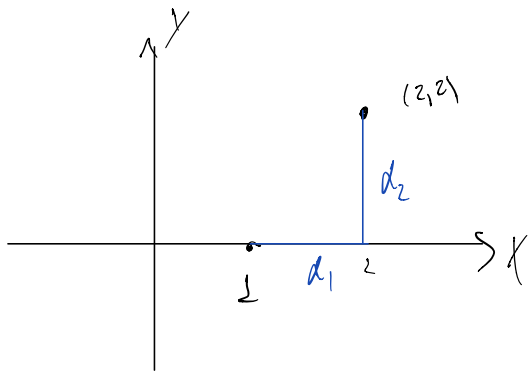
$$\vec{\nabla}\phi_2 = \vec{F}$$

$$\text{dom } \phi_2 = \mathbb{R}^2 - \{\text{eixo } x\}$$

↳ Sempre existe uma função potencial adequada para um domínio simplesmente conexo.

$$\boxed{\vec{F} = d\theta}$$

Ex-) Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$, $\vec{F} = d\theta$ e γ : é uma curva unindo $(1,0)$ a $(2,2)$, sem passar pela origem.



Seja $\gamma = d_1 \cup d_2$

$$\begin{aligned} d_1(t) &= (t, 0) & 1 \leq t \leq 2 & & d_1'(t) &= (1, 0) \\ d_2(t) &= (2, t) & 0 \leq t \leq 2 & & d_2'(t) &= (0, 1) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma} d\theta = \int_1^2 \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad ; \quad \int_{d_1} = \boxed{0}$$

$$\cancel{d_2}: \int_{d_2} d\theta = \int_0^2 \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt =$$

$$2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt = 2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{2^2 \left(1 + \frac{t^2}{4}\right)} dt = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \arctg(1) - \frac{1}{2} \arctg(0)$$

$$= \pi/4 \quad \therefore \int_{\gamma} d\theta = \int_{d_1 \cup d_2} d\theta = \pi/4$$

Seja β uma curva unindo $(1,0)$ a $(2,2)$

1-) $\gamma \cup (-\beta)$ não enlaza a origem.

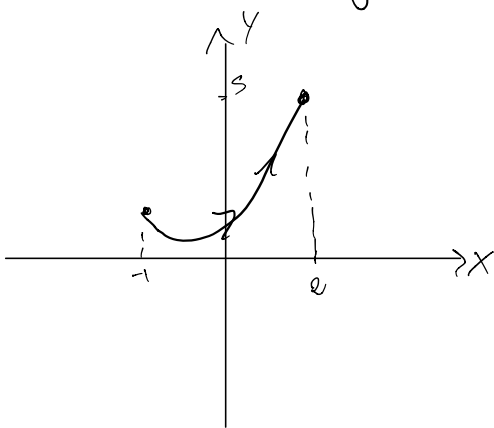
$$\hookrightarrow \int_{\gamma \cup (-\beta)} d\theta = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta - \int_{\beta} d\theta = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta = \int_{\beta} d\theta = \pi/4$$

2-) $\gamma \cup (-\beta)$ enlaza a origem.

$$\int_{\gamma \cup (-\beta)} d\theta = 2\pi \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta - \int_{\beta} d\theta = 2\pi \Rightarrow \int_{\gamma} d\theta = \pi/4 - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$$

Ex-) $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{\sigma}{r} \quad \frac{\vec{r}}{r}$

γ : arco de $y = x^2 + 1$, de $(-1, 2)$ até $(2, 5)$ $-1 \leq x \leq 2$



$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{0 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} ; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{0 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \therefore \boxed{\text{rot } \vec{F} = 0}$$

$$\underline{\text{Dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}}$$

↳ O campo é conservativo mesmo não havendo domínio simplesmente conexo.

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \quad \left. \vphantom{\psi(x,y)} \right\} \underline{\text{Dom } \psi = \text{Dom } \vec{F}}$$

Calculando pela diferença de potencial:

$$\Delta\psi = \psi_f - \psi_i = \frac{1}{2} \ln \left(\underset{4+25}{2^2+5^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1+2^2) = \frac{1}{2} (\ln(29) - \ln(5))$$

$$\underline{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{29}{5} \right)}$$

$$\text{Ex-)} \int_{\gamma} 2x \sin y \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2) \, dy$$

γ : curva ligando $(-1,0)$ a $(5,1)$ $\underbrace{\text{Dom } F = \mathbb{R}^2}_{\substack{\hookrightarrow \text{Simplesmente} \\ \text{Conexo}}}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y$$

$$\boxed{\text{rot} = 0}$$

$\vec{F}$ é conservativo.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x \sin y$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \cos y - 3y^2$$

$$\psi(x, y) = x^2 \sin y + g(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \cos y + g'(y) \quad \begin{array}{c} \text{comparando} \\ \text{4} \textcircled{2} \end{array} \quad \cancel{x^2 \cos y} + g'(y) = \cancel{x^2 \cos y} - 3y^2$$

$$g'(y) = -3y^2$$

$$\int g'(y) dy = -3 \int y^2 dy$$

$$g(y) = \frac{-3y^3}{3}$$

$$\boxed{g(y) = -y^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x, y) = x^2 \sin y - y^3}$$

Calculando pela diferença de potencial temor:

$$\Delta \psi = \psi_B - \psi_A = 25 \sin 1 - 1 - \frac{\sin 0}{0} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 25 \sin 1 - 1$$

Achando uma função potencial e se possuir mesmo domínio que o campo, o campo é conservativo.

Superfícies Parametrizadas: $(\mathbb{R}^3)$

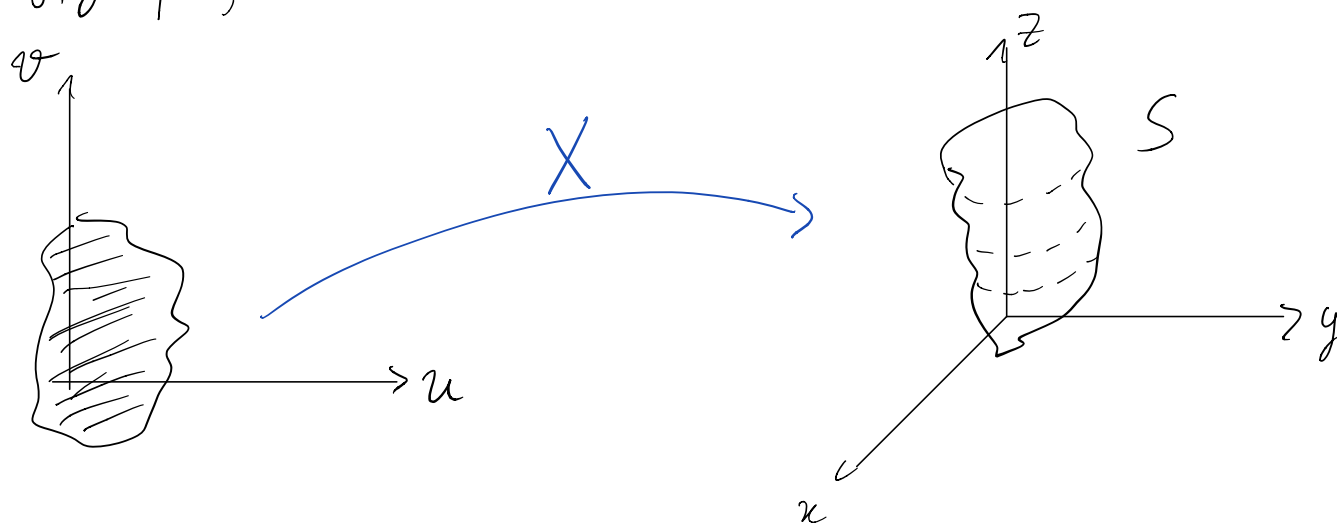
Def: Uma superfície parametrizada em $\mathbb{R}^3$, é uma aplicação

$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Em cálculos sempre se trabalha com a superfície parametrizada.

x, y, z funções de classe C^r



EX1- plano: $2x + y - 3z = 4$

$$\begin{cases} x = u \\ y = 4 - 2u + 3v \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Ex-) Esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0)$$

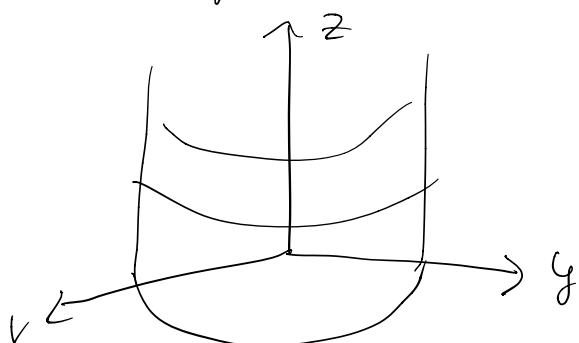
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ y = a \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{matrix}$$

Ex-) Cilindro

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \\ y = a \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$(\theta, z) \xrightarrow{X} (x, y, z)$

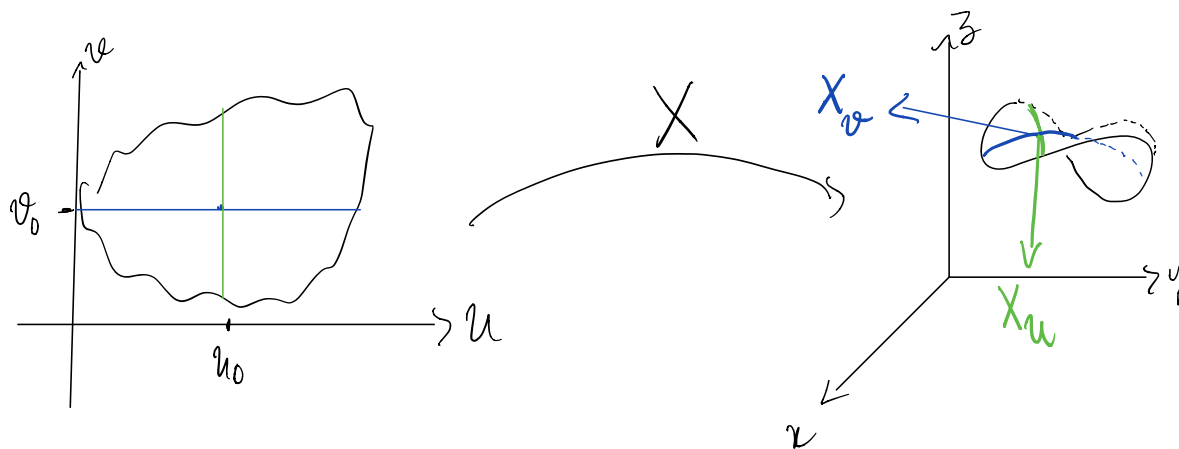


Ex-) Cone:

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = r \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



Pega-se duas retas tais que $u = \text{cte}$ e $v = \text{cte}$. Por meio da transformação X se transformam em curvas no espaço xyz . A derivada dessas curvas será uma derivada parcial, mas mais importante: serão tangentes à superfície. Com esses dois vetores tangentes, é possível construir um plano tangente à superfície.

$$\gamma_1: \gamma_1(u) = X(u, v_0) = (x(u, v_0); y(u, v_0); z(u, v_0))$$

$$\hookrightarrow \text{vetor tangente: } \gamma_1'(u) = \underline{\vec{X}_u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\gamma_2: \gamma_2(v) = X(u_0, v) = (x(u_0, v); y(u_0, v); z(u_0, v))$$

$$\hookrightarrow \text{vetor tangente: } \gamma_2'(v) = \underline{\vec{X}_v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Def: A superfície parametrizada $X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular se possuir plano tangente. Se $\vec{X}_u$ e $\vec{X}_v$ forem linearmente independentes.
 $\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$

Neste caso, o plano tangente é dado por:

$$\underline{X = \lambda \vec{X}_u + \mu \vec{X}_v ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

EX-) esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \cos \theta \sin \varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \sin \theta \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

Plano tangente em $X(\pi/4, \pi/4)$

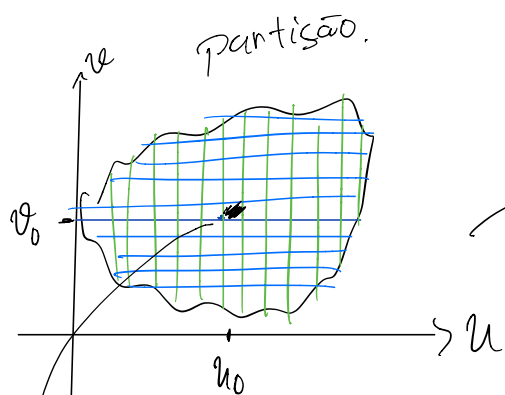
$$X(\pi/4, \pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{X}_\theta = (-\sin\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi, 0) \rightsquigarrow \vec{X}_\theta(\pi/4, \pi/4) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

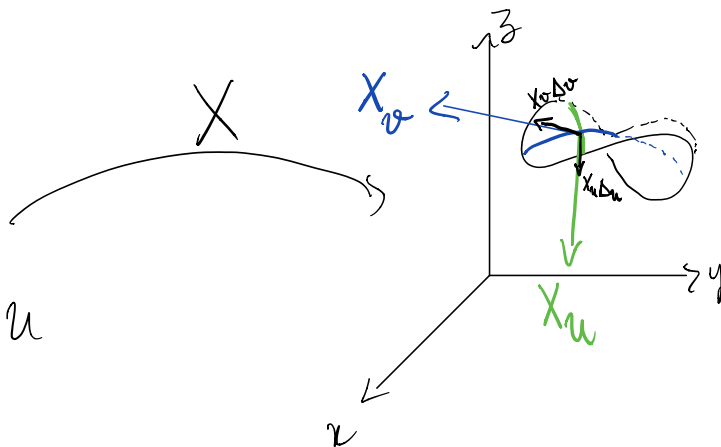
$$\vec{X}_\varphi = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, -\sin\theta) \rightsquigarrow \vec{X}_\varphi(\pi/4, \pi/4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Plano tangente:

$$\vec{X} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + \mu(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$



R_{ij} = retângulo em u, v .



multiplicamos

X_u e X_v por

Δu e Δv

para a correção

do tamanho do

vetor, se aproximando do elemento de arco.

$$\text{área}(X(R_{ij})) \approx \|\vec{X}_u \Delta u \wedge \vec{X}_v \Delta v\|$$

pois o produto vetorial (módulo) devolve a área do paralelogramo entre os 2 vetores, por isso esse produto vetorial acaba sendo um estimador da área.

$$= \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \Delta u \Delta v$$

fator local de correção de área (Jacobiano)

$$\text{área}(S) = \lim_{|p| \rightarrow 0} \sum \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \Delta u \Delta v$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| du dv$$

EX-1 Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \sin\varphi \\ y = a \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = a \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{X}_\theta = (-a \sin\theta \sin\varphi, a \cos\theta \sin\varphi, 0)$$

$$\vec{X}_\varphi = (a \cos\theta \cos\varphi, a \sin\theta \cos\varphi, -a \sin\varphi)$$

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin\theta \sin\varphi & a \cos\theta \sin\varphi & 0 \\ a \cos\theta \cos\varphi & a \sin\theta \cos\varphi & -a \sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cos^2\theta \sin^2\varphi; -a^2 \sin^2\varphi \sin\theta; a^2 \sin\varphi \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi\| = \sqrt{a^4 \cos^2\theta \sin^4\varphi + a^4 \sin^4\varphi \sin^2\theta + a^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} = \underline{a^2 \sin\varphi}$$

$$\text{área}(S) = \iint_D \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta = \int_0^\pi 2\pi a^2 \sin\varphi d\varphi$$

$$= -2\pi a^2 \cos\varphi \Big|_0^\pi = \underbrace{-2\pi a^2 \cos\pi}_{-(-1)} + 2\pi a^2 \underbrace{\cos(0)}_1 = \underline{4\pi a^2}$$

Ex-) Área do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ entre os Cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + x^2 = 4$.

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = v^2 - u^2 \end{cases} \quad 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

$$\vec{X}_u = (1, 0, -2u)$$

$$\vec{X}_v = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

$$\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Área = $\iint_{1 \leq u^2 + v^2 \leq 4} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, du \, dv$, mudando de coordenadas:

$$1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

poderia ter feito de primeira

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ v = r \cdot \sin \theta & 1 \leq r \leq 2 \\ |S| = r \end{cases}$$

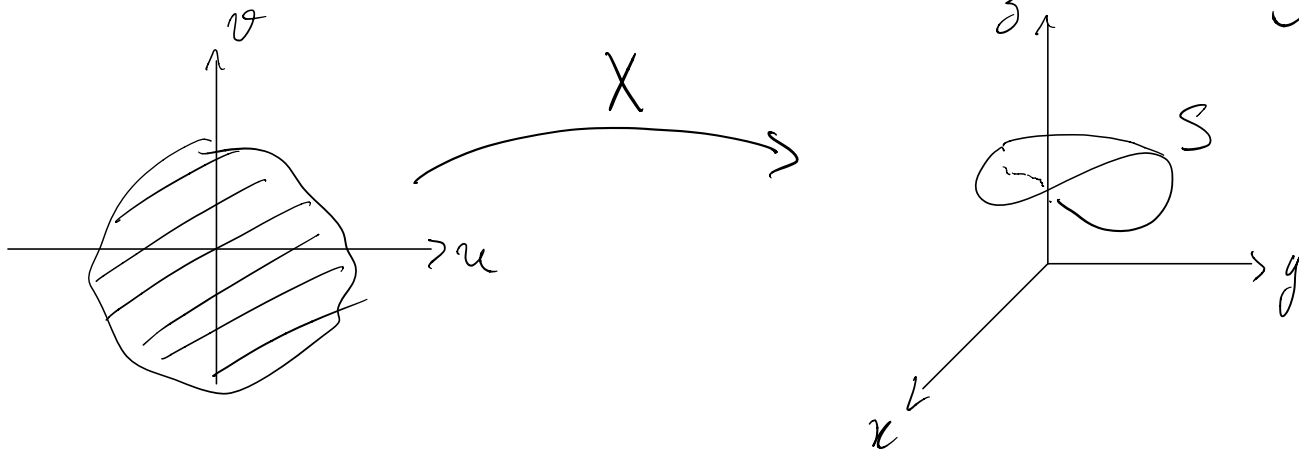
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{8} (4r^2 + 1)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_1^2 = \boxed{\frac{2\pi}{3} (17\sqrt{5} - 5\sqrt{2})}$$

Superfícies Parametrizadas:

$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad C^r;$$

$$(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ; \quad (u, v) \in D$$

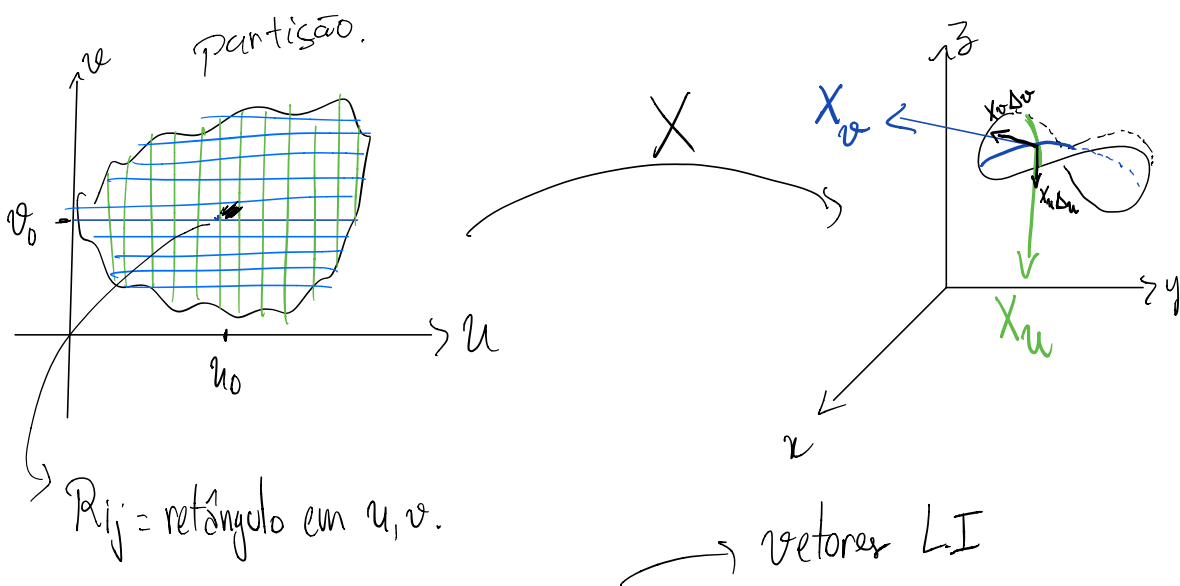
$$S = X(D)$$



$$\vec{X}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\vec{X}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

) Dois vetores tangentes a superfície S.

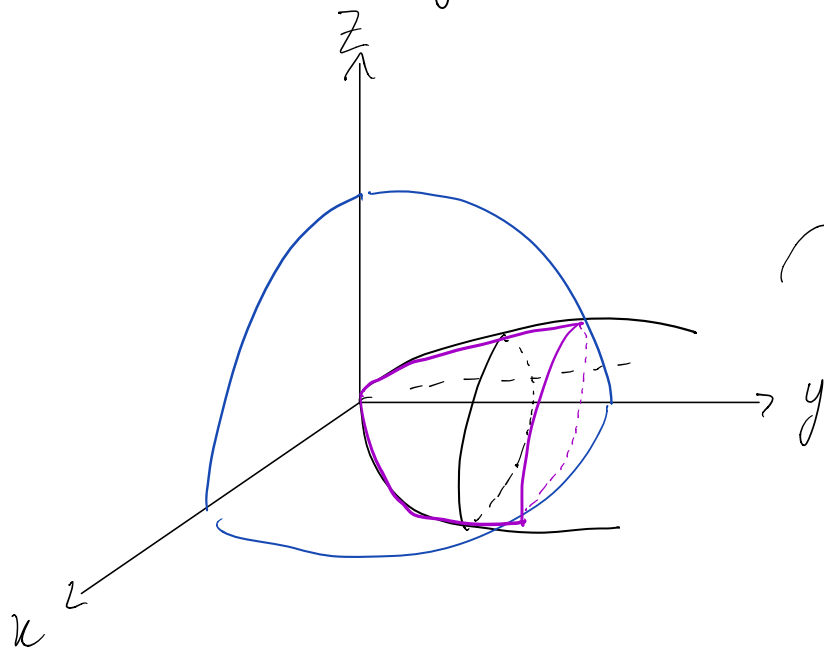


$$S \text{ é regular } \Leftrightarrow \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$$

Logo $\vec{X}_u$ e $\vec{X}_v$ geram um plano tangente em S .

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 ds = \iint_D \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| du dv$$

Ex: Área do pedaço de $y = x^2 + z^2$, contida no interior de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$



no plano XZ
a superfície gera
um círculo.

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\boxed{y_2 = 1}$$

$$y = 1 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1$$

↳ Circunferência de raio 1.

$$S = \begin{cases} x = u \\ y = u^2 + v^2 \\ z = v \end{cases}, D = u^2 + v^2 \leq 1$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{e}$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$\vec{X}_u = (1, 2u, 0)$$

$$\vec{X}_v = (0, 2v, 1)$$

$$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \hat{i}(2u) - \hat{j}(1) + \hat{k}(2v)$$

$$\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

$$\text{Área}(S) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \, du \, dv$$

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos \theta \\ v = r \cdot \sin \theta \\ |S| = r \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

Massa de S:

$$\text{densidade} = \delta(x, y, z)$$

$$\text{Massa} = \iint_S \delta(x, y, z) \, ds$$

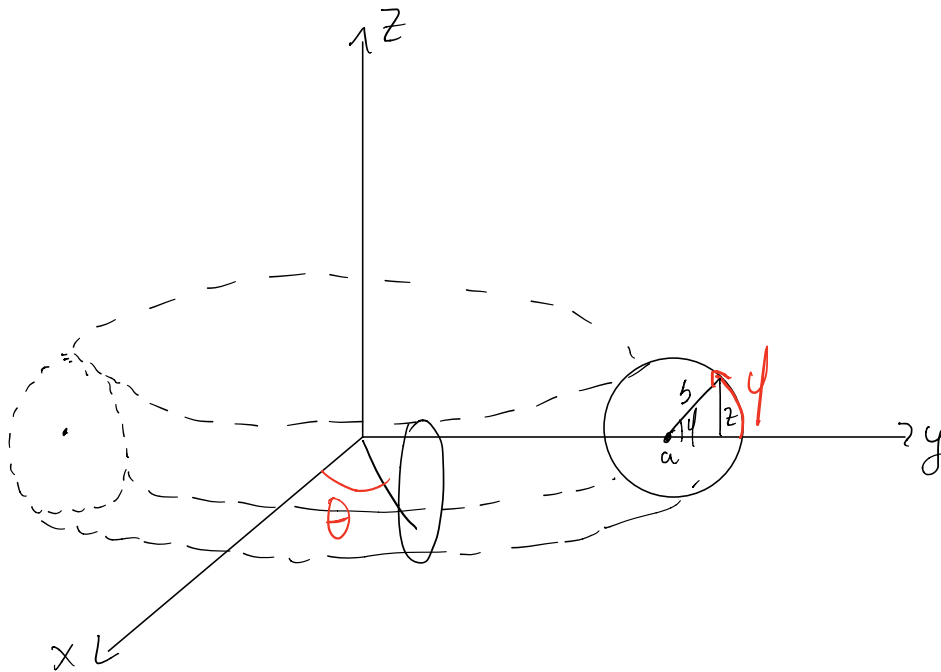
$$= \iint \delta(u, v) \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \, du \, dv$$

D
(u,v)

2-) Toro de revolução:

S: obtida pela rotação de $(y-a)^2 + z^2 = b^2$, $x=0$ em torno do eixo OZ $0 < b < a$

oi L3
t e amoooo



$$\begin{cases} x = (a + b \cos \varphi) \cdot \cos \theta \\ y = (a + b \cos \varphi) \cdot \sin \theta \\ z = b \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_\theta &= (- (a + b \cos \varphi) \cdot \sin \theta, (a + b \cos \varphi) \cdot \cos \theta, 0) \\ \vec{X}_\varphi &= (-b \sin \varphi \cos \theta, -b \sin \varphi \sin \theta, b \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$E = \langle \vec{X}_\theta, \vec{X}_\theta \rangle = (a + b \cos \varphi)^2; \quad F = \langle \vec{X}_\theta, \vec{X}_\varphi \rangle = 0; \quad G = \langle \vec{X}_\varphi, \vec{X}_\varphi \rangle = b^2$$

$$\| \vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_\varphi \| = \sqrt{EG - F^2} = b(a + b \cos \varphi) \quad \leadsto \text{agora so calcular a integral}$$

Fluxo

Orientação de superfície:

$\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \neq 0$, S regular

em cada ponto há 2 versores normais (um que aponta pra dentro e outro que aponta pra fora).

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|}$$

↳ Vale lembrar que $\vec{X}_u, \vec{X}_v$ são ambos vetores tangentes a superfície, logo o vetor resultante de seu produto vetorial será um vetor normal (perpendicular) a superfície em todos os seus pontos.

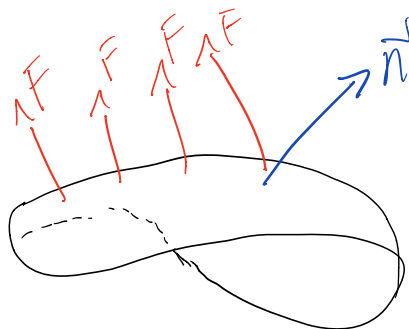
→ Pensando numa ideia de fluxo de um campo vetorial, estamos interessados em calcular intuitivamente pensando, o quanto do campo atravessa uma região da superfície. Para isso é analisado a componente do campo vetorial que é paralela a normal da superfície, por meio de um produto escalar do campo com o vetor normal (unitário) e o resultado será o quanto do campo está projetado nessa direção normal e a isso nomeamos Fluxo.

Ou ainda o quanto do campo segue essa direção, o que leva a o quanto do campo atravessa a superfície.

Matematicamente temos:

Fluxo de $\vec{F}$ através de S .

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$



$$\iint_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|} \cdot \|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\| \, du \, dv$$

$$\Rightarrow \iint_D \vec{F} \cdot \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v \, du \, dv$$

So funciona p/ superfícies orientáveis.

Def: S . regular é orientável se: $\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\|}$

é contínuo em S

(se existe escolha contínua de vetores normais em S).

Ex de não orientáveis: Faixa de Möbius
 $\hookrightarrow$ n temlado



Garrafa de Klein:

↳ N tem interior nem exterior



Def.: Fluxo:

dados $\vec{F}$, campo vetorial, S orientada pela escolha de um campo normal unitário;

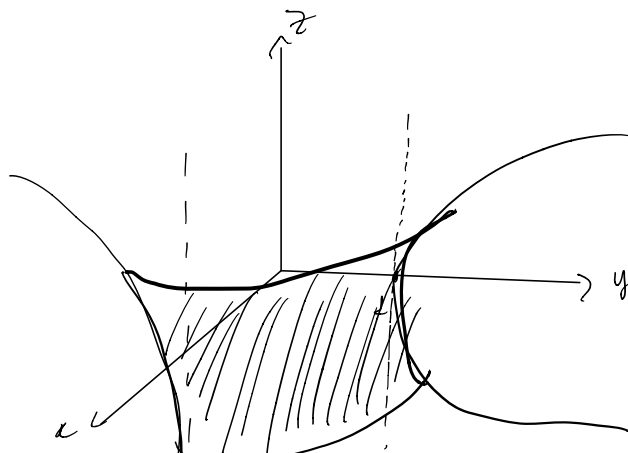
$$S \subset \text{dom } \vec{F}$$

Fluxo de $\vec{F}$ através de S é

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v du dv$$

Ex-) $\iint_S \vec{F} d\vec{S}$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, 0)$

S : pedaço de $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ com $0 \leq z \leq 1$ com normal que se afasta do eixo z .



Um esboço
nada fiel
a realidade.

Parametrização:

$$1-) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2 - 1} \end{cases}$$

$$2-) \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = \sqrt{r^2 - 1} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \end{matrix}$$

$$1 \leq u^2 + v^2 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}$$

$$\vec{X}_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 0)$$

$$\vec{X}_r = \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \right)$$

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_r = \vec{i} \left(\frac{r^2 \cdot \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}} \right) + \vec{j} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 1}} \right) + \vec{k} (-r)$$

$$\text{Flux}_0 = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, 0) \cdot \left(\frac{r^2 \cdot \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}, \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}, 0 \right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2 \cdot r}{\sqrt{r^2 - 1}} dr d\theta$$

$t = r^2 - 1 \quad r = 1 \Rightarrow t = 0$
 $dt = 2r dr \quad r = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$
 $r dr = \frac{dt}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} d\theta \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2} + t^{-1/2} dt = \pi \left[t^{3/2} \cdot \frac{2}{3} + t^{1/2} \cdot 2 \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \pi \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{8\pi}{3}$$

Obs: também é escrito da seguinte forma:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Ex-) Calcule $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ sendo S o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ c/ normal que aponta p/ixo z .

$$S = \begin{cases} x = \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \sin \theta & 0 \leq z \leq 1 \\ z = z & \end{cases}$$

$$\vec{X}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\vec{X}_z = (0, 0, 1) \quad \vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_z = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0 \vec{k}$$

A normal pedida é $(-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}_{-1} dz d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 -1 dz d\theta = \int_0^1 -2\pi dz \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

$\vec{F}, v \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$$

Divergente:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad , \text{ ou na notação diferencial:}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Equação da continuidade: Mecânica dos Fluidos

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$\vec{v} = v(t, x, y, z)$ velocidade do fluido

$\rho = \rho(t, x, y, z)$ - densidade

↓
divergente está medindo a quantidade de massa que sai pelo volume por unidade de tempo.

↳ divergente mede o quanto o campo $\vec{F}$ se espalha em cada ponto.
↳ diverge

Teorema de Gauss:

$\vec{F}: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vetorial de classe C^1

Fechada!
↑

∂V = Superfície regular por partes orientada pela normal exterior.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Ex-) $\iint_S -xz \, dy \wedge dz + (y^3 - yz) \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$

$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\vec{n}$ normal exterior.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \cancel{-z} + 3y^2 \cancel{-z} + \cancel{z} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3y^2$$

pelo teorema de Gauss:

$$= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_V 3y^2 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = b \cdot \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = c \cdot \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$|J| = abc \rho^2 \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 3 \cdot b^2 \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi \cdot abc \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$3ab^3c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\phi \sin^2\theta \left. \frac{\phi^5}{5} \right|_0^{\pi} d\phi d\theta = \frac{3ab^3c}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta - \cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{5} \pi abc \frac{4}{3} = \frac{4\pi ab^3c}{5}$$

Ex-) $\iiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$

S : bordo/fronteira do cubo $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

normal $\vec{n}$ exterior.

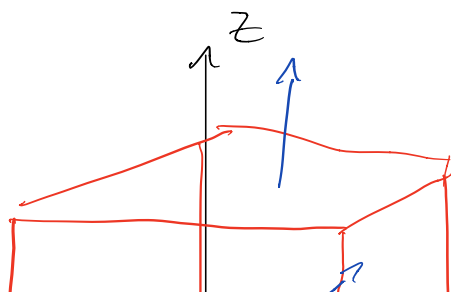
$$\vec{F} = \vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$$

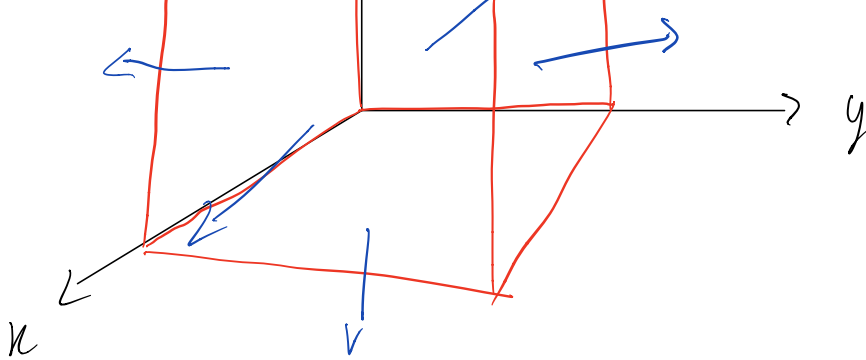
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1+1+1 = 3$$

peelo teorema de Gauss: $\iiint_V 3 dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3 \cdot dx dy dz$

$$= 3 \cdot xyz \Big|_0^1 = 3$$

$$3 \cdot \iiint_V dV = 3 \cdot \text{Vol}(V) = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

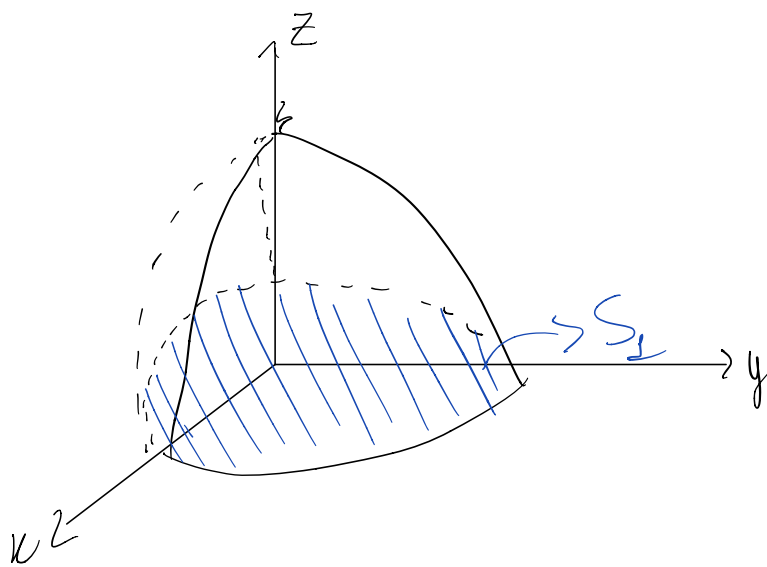




Ex-1) Calcule $\iiint_S x^3 dy dz + \left[(\sin^2 z) \right]^{\sqrt{z^2+1}} dz dx + y^2 dx dy$

S : é o pedaço de $z = 4 - x^2 - y^2$, satisfazendo $z \geq 0$ e com $\vec{n}$ que se afasta do eixo z .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2$$



Seja $S_1: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ com normal $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ com $\partial V = S \cup S_1$

→ aqui o teorema de Gauss é aplicável.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS$$

①
②

$$\textcircled{1} = \iiint_V 3x^2 dV \quad \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4-r^2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} 3r^2 \cos^2\theta \frac{r}{|s|} \cdot dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 \cos^2\theta (4-r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} \cos^2\theta \frac{r^4}{4} - \frac{3}{2} \frac{r^6 \cos^2\theta}{6} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3 \cdot \cos^2\theta \cdot 2^4 - \frac{2^6}{2} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} 3 \cdot \cos^2\theta 16 - 32 \cos^2\theta d\theta$$

$2\theta = u$

$$\Rightarrow 16 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{16}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \Rightarrow 8 \cdot \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2\theta d\theta = 8 \cdot \left[2\pi + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 16\pi$$

$$\textcircled{2} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$S_1: \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot \sin \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{X}_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 0)$$

$$\vec{X}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_r = 0\vec{i} + 0\vec{j} - r\vec{k} \quad \text{orientação correta.}$$

$$\textcircled{2} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^3 \cdot \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right]_0^2 d\theta \Rightarrow \frac{-16}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow -4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = -2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = -2 \left(2\pi - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{2\pi} = -4\pi$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 16\pi - (-4\pi) = 20\pi$$

0 Campo $\frac{\vec{r}}{r^3}$; $\vec{r}$ = vetor radial = (x, y, z)

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

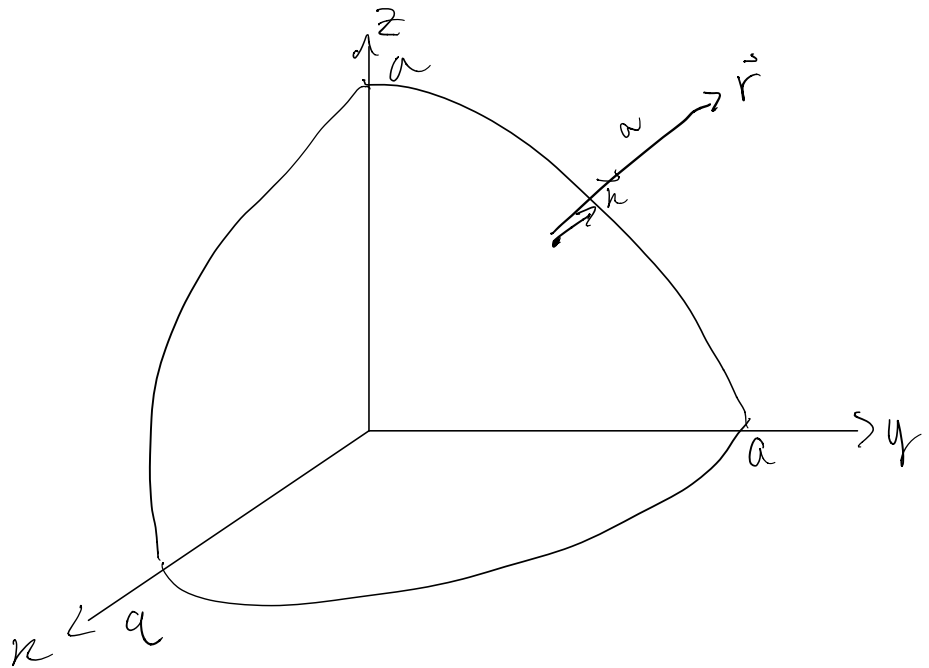
$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \rightsquigarrow \text{A menos de constantes} \rightarrow \text{Campo Elétrico.}$$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; normal exterior

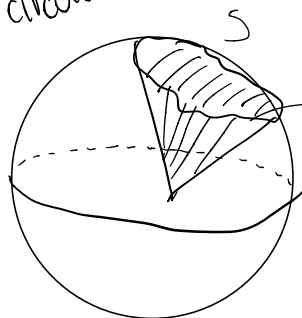
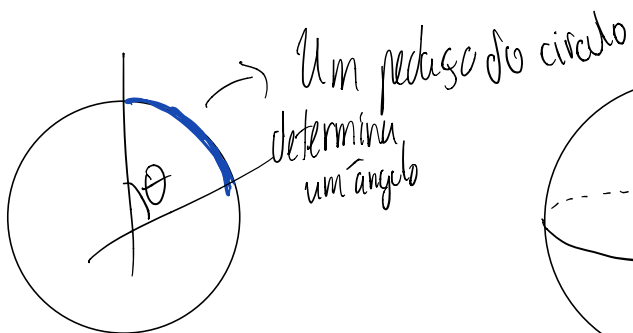
$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = a$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} = \frac{1}{a^2}$$



$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \frac{1}{a^2} \, dS = \frac{1}{a^2} \text{Área}(S) = \frac{4\pi a^3}{a^2} = \frac{4\pi}{1}$$



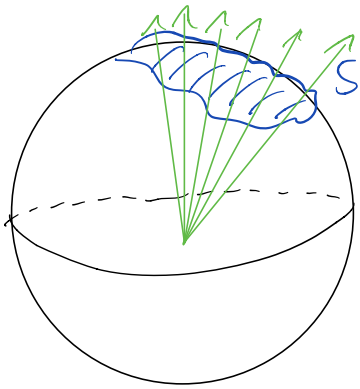
Concomitantemente em $\dim=3$
uma região determina um
ângulo sólido

ângulo
Sólido da esfera

Ângulo Sólido

S contido na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

O ângulo sólido determinado por S é a reunião das semi-retas que saem da origem e passam por S.



medida do ângulo sólido (Ω)

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} ds$$

(No caso da esfera, $\Omega = 4\pi$)

Voltando ao campo $\frac{\vec{r}}{r^3}$: $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \rightarrow$ Incompressível

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{r^3}} \right) = \frac{1 \cdot \sqrt{r^3} - x \cdot 3 \cdot \sqrt{r^2} \cdot \frac{x}{r^3}}{\sqrt{r^6}}$$

$$= \frac{\sqrt{r^3} - 3x^2 \sqrt{r}}{\sqrt{r^6}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\sqrt{r^3} - 3y^2 \sqrt{r}}{\sqrt{r^6}} ; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\sqrt{r^3} - 3z^2 \sqrt{r}}{\sqrt{r^6}}$$

domínio de $\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$= \mathbb{R}^3 - (0,0,0)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3\sqrt{1-3(x^2+y^2+z^2)}\sqrt{1}}{\sqrt{1}^6} = \frac{3\sqrt{1}-3\sqrt{1}}{\sqrt{1}^6} = \underline{0}$$

$$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} ds \quad S: S_1 \cup S_2$$

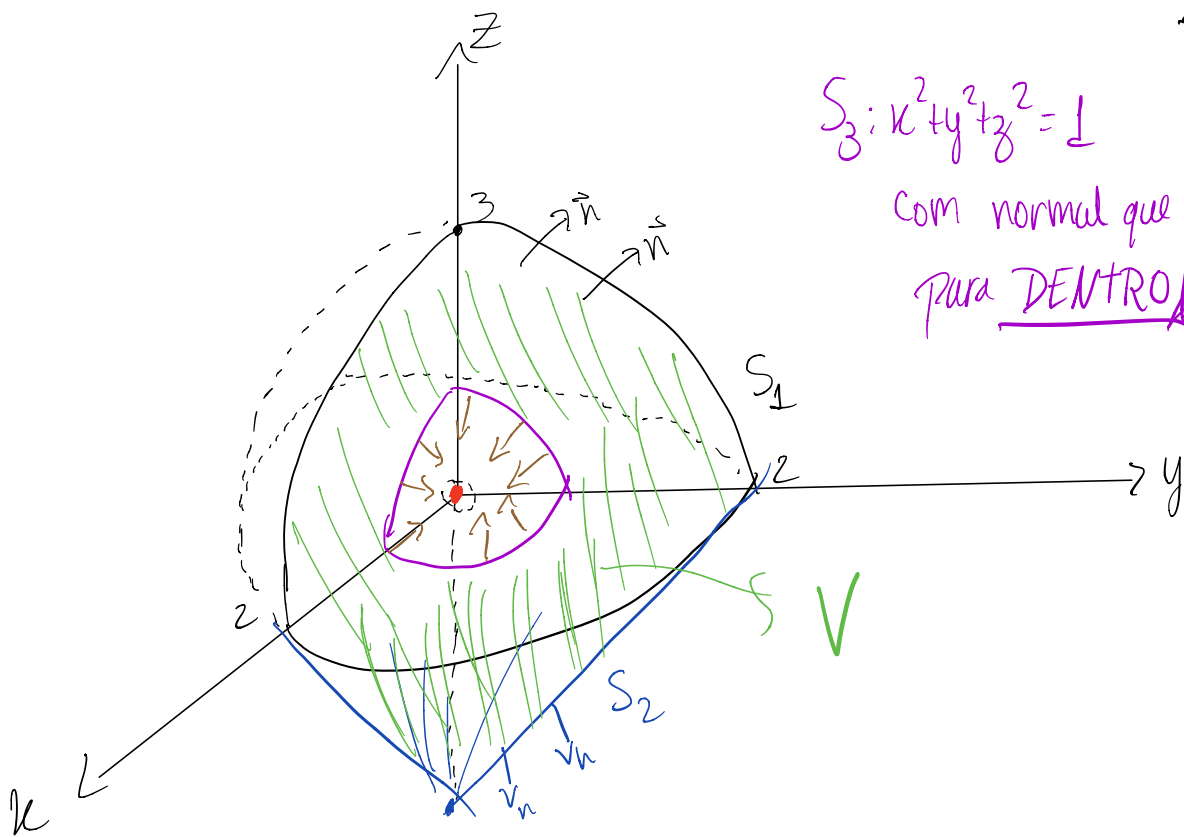
$$S_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad z \geq 0, \quad \vec{n}_1 \text{ de cota } \geq 0$$

$$S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$$

$$z \leq 0$$

$$\vec{n}_2 \text{ de cota } \leq 0$$

É a normal externa
à região de integração



Isolar a singularidade para poder aplicar o teorema de Gauss.

$$V \subset \mathbb{R}^3 \text{ cujo fronteira: } \partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Pelo Teorema de Gauss temos:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV = \iiint_{\underbrace{S_1 \cup S_2 \cup S_3}_{\partial V}} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} \Rightarrow \text{Como } \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \text{ temos:}$$

$$0 = \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_3} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}}_{-4\pi}$$

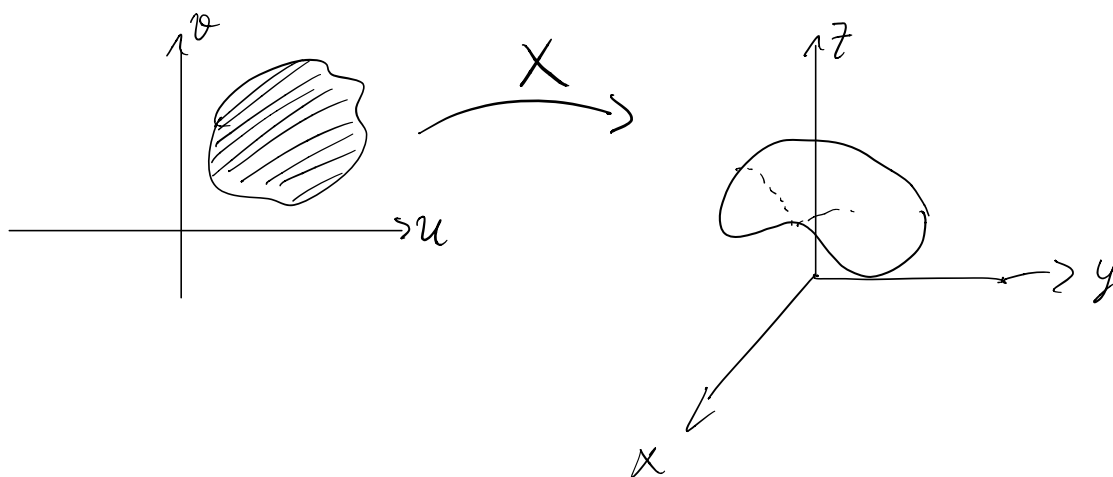
↳ normal aponta p/ lado contrário ao calculado anteriormente

$$\Rightarrow \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} - 4\pi = 0 \Rightarrow \iint_{S_1 \cup S_2} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} = 4\pi$$

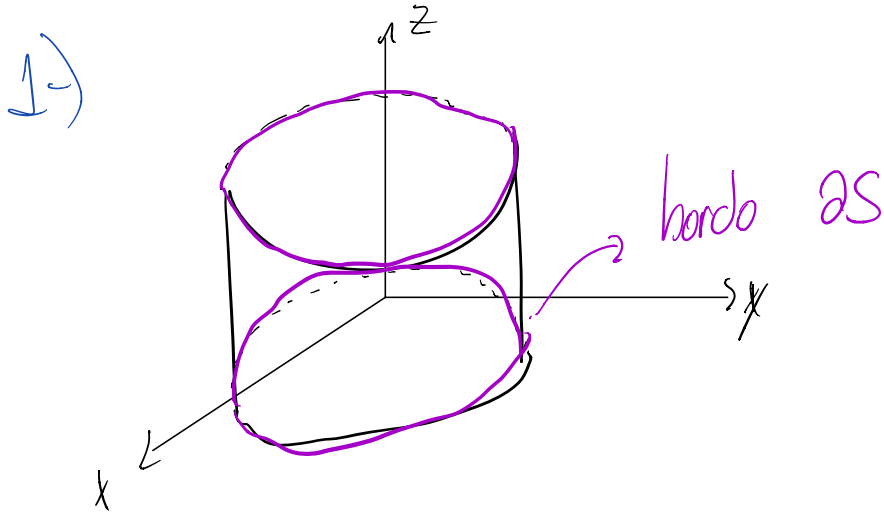
Bordo:

Noção intuitiva do bordo de uma superfície.

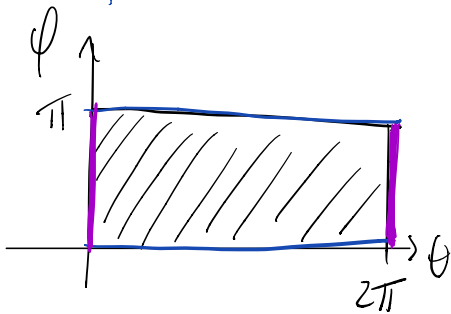
$$X: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad S = X(D)$$



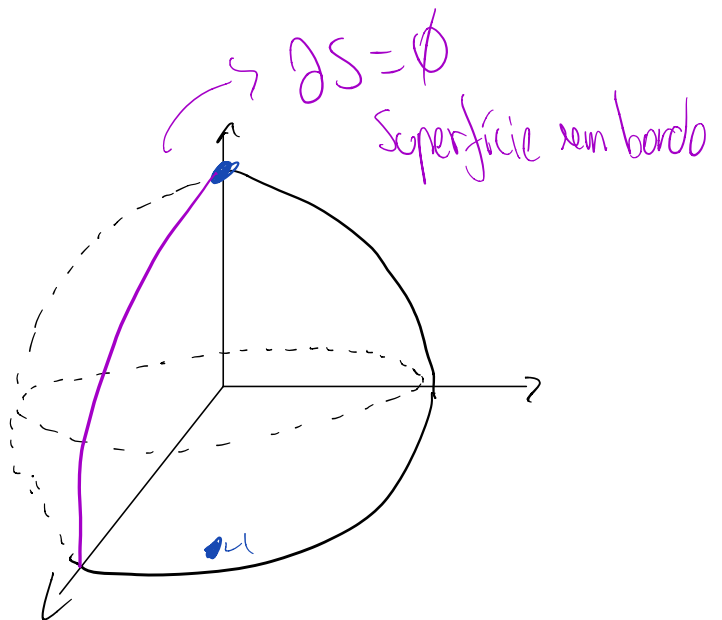
- bordo de S é formado por curvas regulares por partes
- as curvas do bordo são percorridas uma única vez.
- $\partial S \subset X(\partial D)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$



2-) Esfera

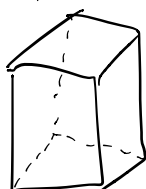


$$\begin{aligned}
 x &= a \cdot \cos \theta \sin \phi \\
 y &= a \cdot \sin \theta \sin \phi \\
 z &= a \cdot \cos \phi
 \end{aligned}$$



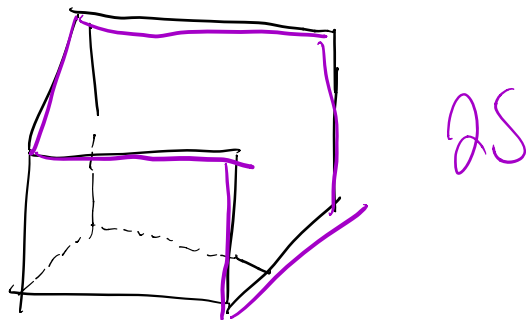
Superfícies fechadas geralmente não possuem bordo.

3-) Cubo



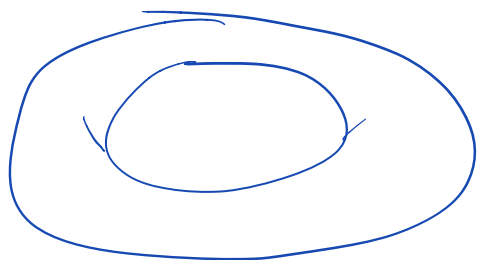
$\partial S = \emptyset$

4-) Cubo sem 2 faces adjacentes:



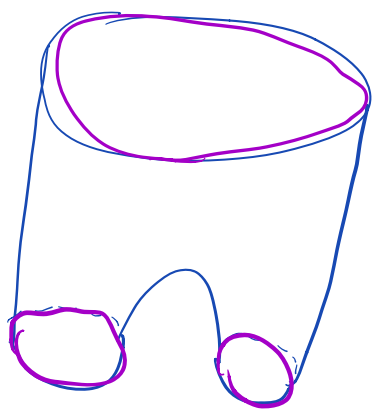
∂S

5-) Toro de Revolução



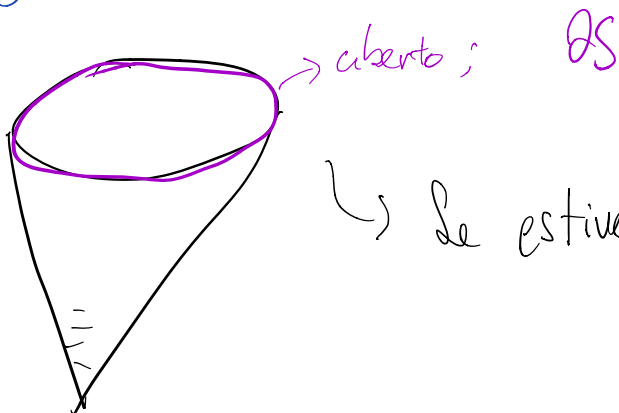
$\partial S = \emptyset$

6-)



∂S

7-) Pedaco de Cone:

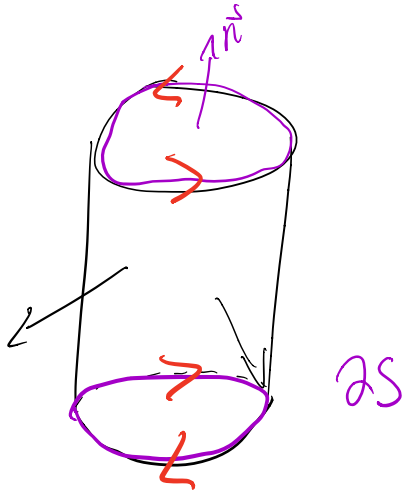


aberto; ∂S

↳ Se estiver fechado: $\partial S = \emptyset$

Orientação coerente $\rightarrow$ regra da mão direita no vetor normal à superfície p/ determinar o sentido do bordo ∂S .

Ex-) Cilindro c/ normal pra fora:



bordo com sentidos contrários dados pela regra da mão direita.

Teorema de Stokes:

$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vetorial, C^n

S : superfície parametrizada regular por partes orientável e S e ∂S orientados coerentemente. Então:

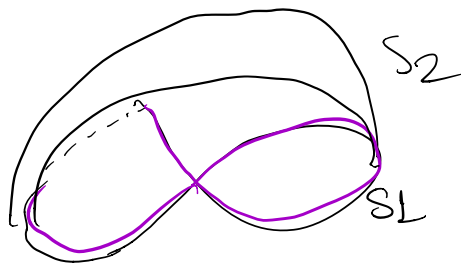
$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{r}$$

Obs:

1-) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0 \quad \leadsto \quad \vec{F}$ é de classe C^2

2-) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = 0$

3-)



$$\partial S_1 = \partial S_2$$

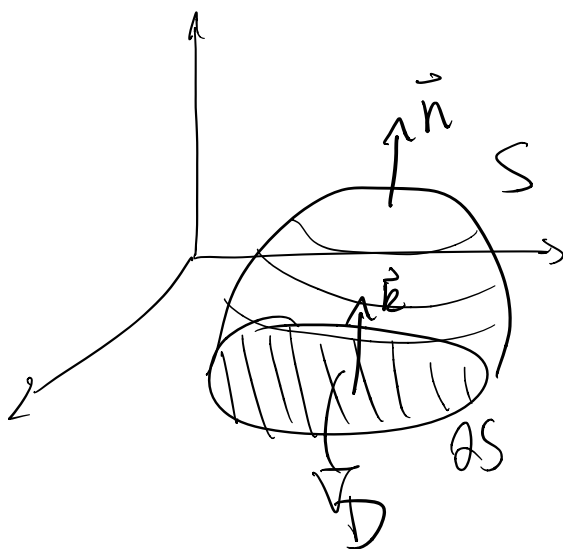
Dois superfícies que são ligeiramente diferentes mas possuem o mesmo bordo.

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n}_2 - \iint_{S_1} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n}_1 = \iint_{S_2 \cup (-S_1)} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_{\text{int}(S_2 \cup (-S_1))} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \, dv = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \iint_{S_1} \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Logo, a integral não depende da superfície, mas sim do bordo da superfície.

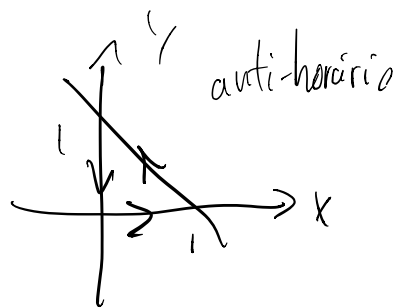
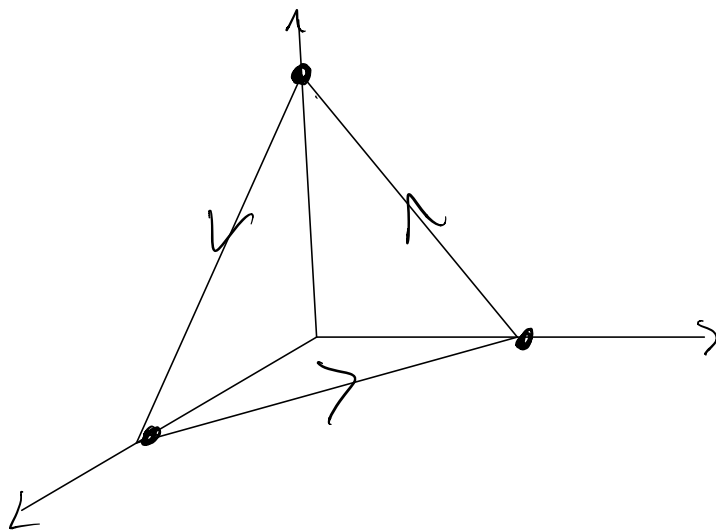
4-) Se ∂S é plano



$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{k}}_{\partial D} = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Teorema de Green

Ex-1) $\int \vec{F} d\vec{r}$ sendo
 $\vec{F} = (z^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1+y^2))\vec{j} + (xy + \sin^3 z)\vec{k}$
 e sendo γ a fronteira do triângulo de vértices $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,2)$
 percorrida de modo que sua projeção no plano xy esteja no
 sentido anti-horário.



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 + e^{x^2} & y^2 + \ln(1+y^2) & xy + \sin^3 z \end{vmatrix}$$

$$= x \vec{i} + (-y + 2z) \vec{j} + (0) \vec{k} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Eq. Plano:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2x - 2 + z + 2y = 0 \Rightarrow \underline{2x + 2y + z - 2 = 0}$$

$$S: \begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & 0 \leq v \leq 1-u \\ z = 2 - 2u - 2v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_u &= (1, 0, -2) \\ \vec{X}_v &= (0, 1, -2) \end{aligned} \quad \} \quad \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = (2, 2, 1)$$

Orientação coerente

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-u} (2u - 2v + 8 - 8v - 8u) dv du = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

↳ Lembrando que no teorema de Stokes independe da Superfície mas depende univocamente do bordo da Superfície

↳ Muitas vezes para aplicar o Teorema de Stokes é conveniente Criar uma certa Superfície genérica S , tal que $\partial S = \gamma$

↳ Curva γ do enunciado

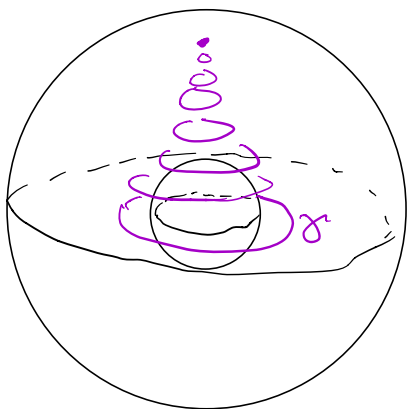
Def: $A \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio simplesmente conexo se:

1-) Qualquer curva fechada simples pode ser contraída até um ponto em A .

2-) ^{ou} qualquer curva fechada é bordo de uma superfície em A .

↳ A região pode ter buracos e ainda continuar sendo simplesmente conexo.

Ex: | Coroa Esférica: é simplesmente conexo.



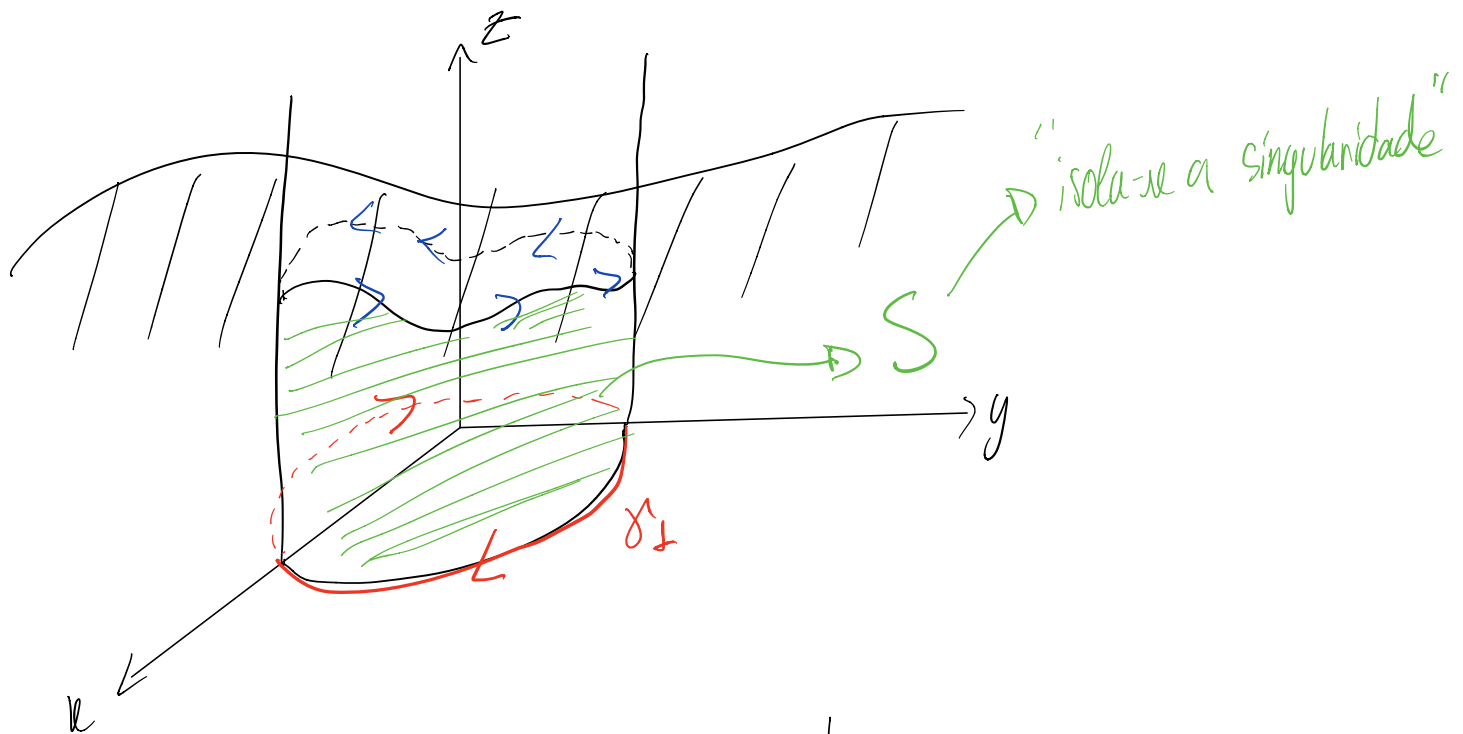
Ex: | $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } z\}$

↳ Não é simplesmente conexo.

Teorema: $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo C^1 , Se $\text{dom}(\vec{F})$ é simplesmente conexo (em $\mathbb{R}^3$) e $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$. Então $\vec{F}$ é conservativo.

EX-3 $\int \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + \sin(1+z^{10}) dz$

$\gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\sin y + s \end{cases}$ em Oxy no sentido anti-horário.
 $\hookrightarrow$ calha senoidal (telhas)



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & \sin(1+z^{10}) \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$\hookrightarrow \text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } z\}$

Seja $\gamma_1: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ no sentido horário.

e Seja S o pedaço do cilindro $x^2+y^2=1$, entre γ e γ_1 , com normal $\vec{n}$ "para dentro". Aplicar-se então o teorema de Stokes na superfície S :

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{r} = \int_{\gamma_1 \cup \gamma} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = -(-2\pi) = \underline{2\pi}$$

(anti-horário) (horário)

$$\gamma_1: \begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \\ z = 0 \end{cases} \leadsto dz = 0$$

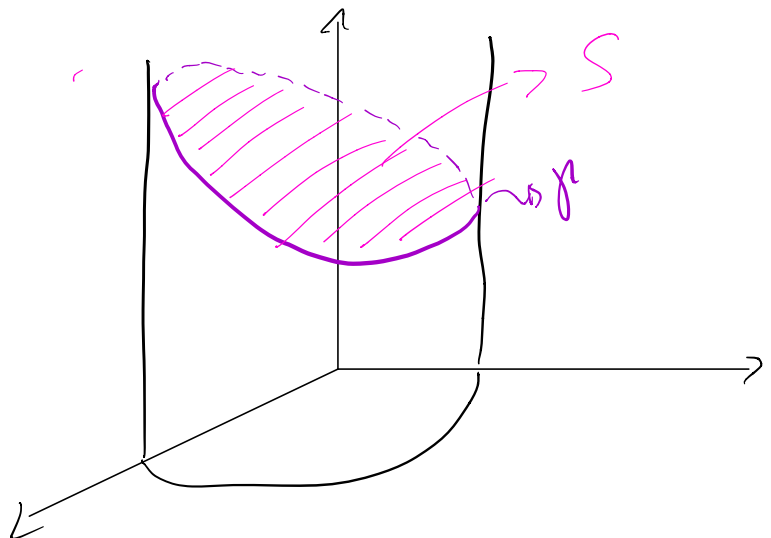
EX-1) $\int_{\gamma} (z+y^2)dx + (y^2+1)dy + [\ln(z^2+1)+y]dz$

$\overbrace{x^2+y^2=4}^{z=10-y} \rightarrow z=10-y$

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 10-2\sin t)$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = (0, 0, +2y)$$



Definimos uma superfície S tal que $\partial S = \gamma$

↳ o que permite utilizar o teorema de Stokes.

↳ pedaço de plano.

$$S = \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \cdot \sin \theta & 0 \leq r \leq 2 \\ z = 10 - r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = 10 - r \cdot \sin \theta \end{cases}} \right\} \underline{\partial S = \gamma}$$

$$\vec{X}_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, -r \cdot \cos \theta)$$

$$\vec{X}_r = (\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta)$$

$$\vec{X}_\theta \wedge \vec{X}_r = (0, -r, -r) \rightsquigarrow \text{sentido contrário}$$

$$\vec{X}_r \wedge \vec{X}_\theta = (0, r, r) \rightarrow \text{normal coerente}$$

Pelo Teorema de Stokes:

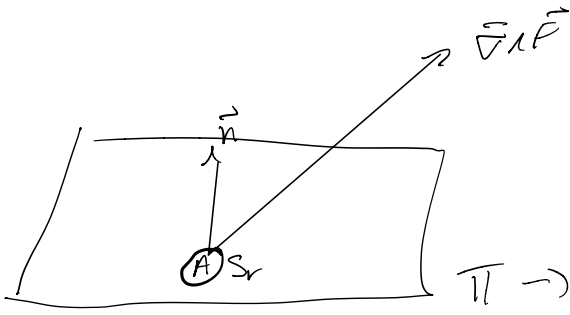
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r - 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = \underline{4\pi} \end{aligned}$$

Significado Físico do Rotacional

↳ dado $\vec{F}$, o que é $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ num ponto?
escolha vetor $\vec{n}$ arbitrário em $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} = ?$$

dado $\vec{F}$, o que é $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ num ponto?
escolha vetor $\vec{n}$ arbitrário em $\mathbb{R}^3$
 $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} = ?$



$\Pi \rightarrow$ plano $\perp \vec{n}$, $A \in \Pi$

$S_r =$ circunferência de centro A e raio r .

Teorema de Stokes:
$$\iint_{\text{int}(S_r)} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{S_r} \vec{F} \, dr$$

$$\text{rot } \vec{F}(A) \cdot \vec{n} \cdot \text{área}(S_r) \approx \oint_{S_r} \vec{F} \, dr \quad (\text{visto que } \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \text{ é contínuo e não deve variar muito para } S_r \text{ pequeno})$$

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_r} \vec{F} \, dr}{\pi r^2}$$

↳ Rotacional em cada ponto mede a relação entre a circulação na região e a área circunscrita.

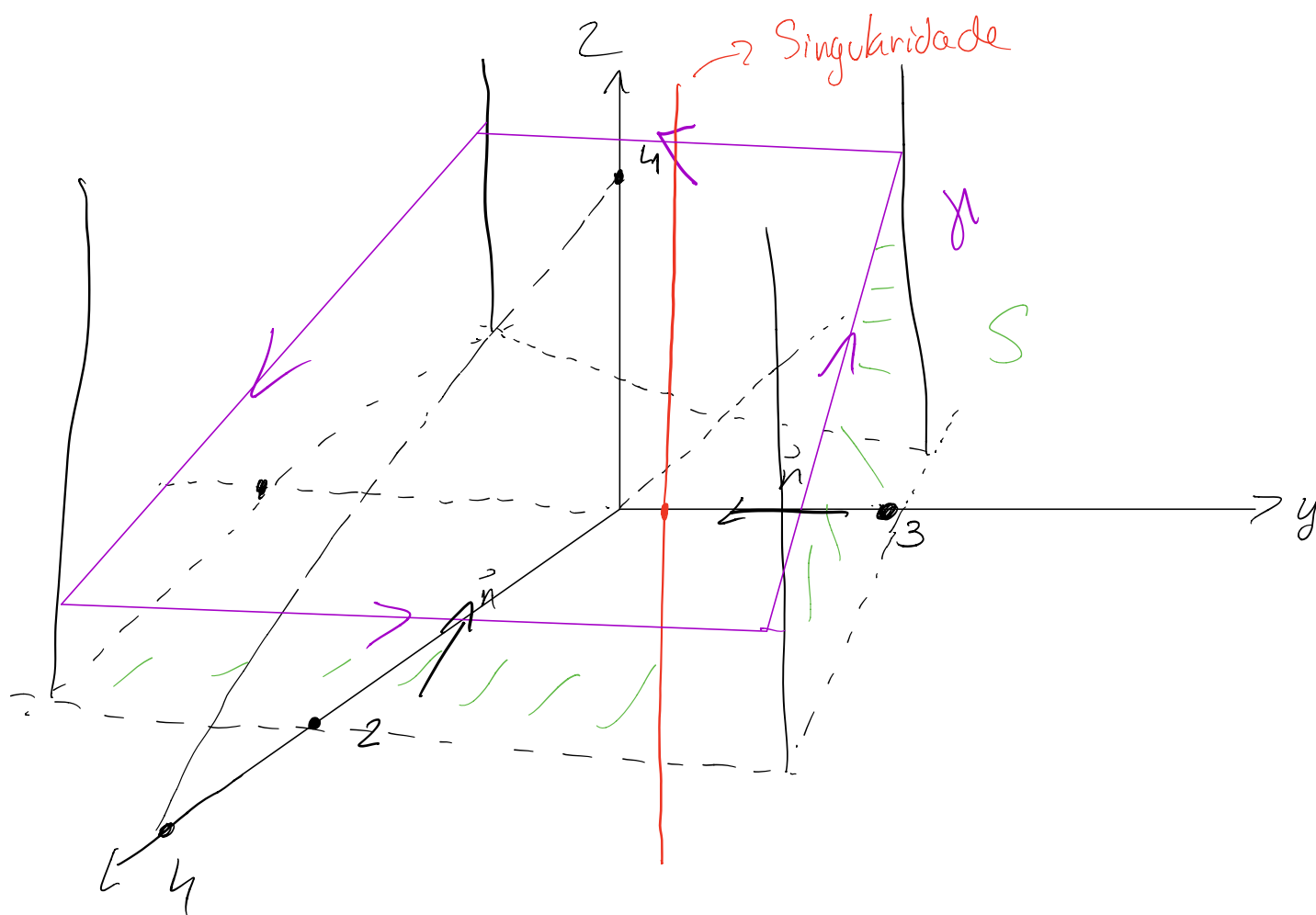
EX-) $\int_{\gamma} \frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2} dx + \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + z \, dy + \sin z \, dz = \textcircled{*}$

Seja γ a intersecção de $x=2$, $x=-2$, $y=3$, $y=-3$, $z=4-x$ com projeção no xy no sentido anti-horário.

$$\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 1, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = (-1, 0, 0)$$

$\vec{F}$ não é conservativo.



Seja γ_1 o retângulo: $z=0$, $x=2$, $x=-2$, $y=3$, $y=-3$ percorrido no sentido horário.

Seja S o pedaço do prisma entre y_1 e y_2 com $\vec{n}$ normal que aponta p/ eixo z .
Aplicando Teorema de Stokes:

$$\underbrace{\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S}}_{(I)} = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r}$$

$$(I) S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_1} (-\hat{i})(-\hat{i}) = 1 \cdot \text{área}(S_1) = \underline{12}$$

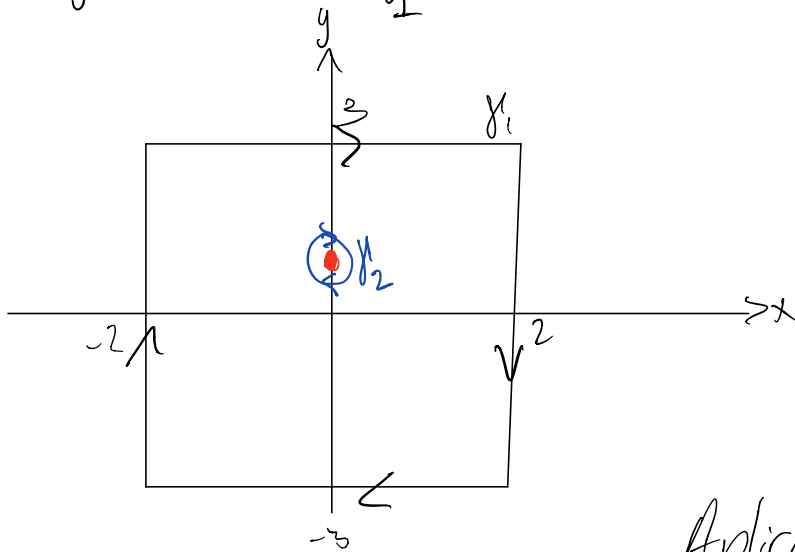
$$\iint_{S_2} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_2} (-\hat{i})(\hat{j}) = \underline{0}$$

$$\iint_{S_3} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_3} (-\hat{i})(\hat{i}) d\vec{S} = -\text{área}(S_3) = \underline{-36}$$

$$\iint_{S_4} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = \iint_{S_4} (-\hat{i})(\hat{j}) d\vec{S} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{F} d\vec{S} = 12 - 36 = \underline{-24}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = -24 - \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r}$$



$$\gamma_2: r = \sin \theta$$

$$y = 1 + \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = 0$$

$$D \subset \mathbb{R}^2, \text{ com}$$

$$\partial D = -\gamma_1 \cup \gamma_2$$

Aplicando Stokes:

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} d\vec{S} = \int_{-\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$\iint_S \underbrace{(+\vec{k})(-\vec{i})}_{0} dS = - \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$0 = - \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} - 2\pi \Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = -2\pi \quad \text{---} \cancel{-2\pi}$$

Finalmente:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = 2\pi - 24$$

FIAM

OBS: Alguns apontamentos devem ser feitos em relação a teoria de campos conservativos, como por exemplo o Teorema de Helmholtz: