Cálculo II   Calculo II

Máximos e mínimos de funções de duas variáveis.

$D \subset \mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}$ função

O ponto (x_0, y_0) é ponto de máximo absoluto de f (global)

se $f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$

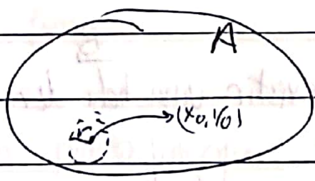
O ponto (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f se existir uma bola aberta B de centro em (x_0, y_0) e raio $r > 0$ tal que:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B \cap D$$

Analogamente $\exists$ ponto de mínimo local, global.

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$

Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é um ponto interior de A se existir uma bola aberta $B \subset A$, de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$



Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se todos os seus pontos são pontos interiores

/ /

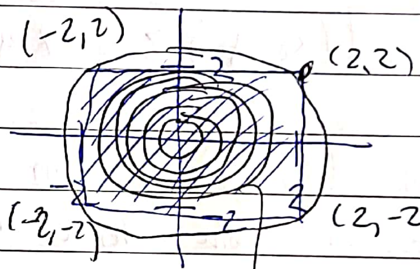
Ex 1-) $f(x,y) = x^2+y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$

$f(0,0) = 0 \leq f(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Logo $(0,0)$ é um ponto de mínimo global de f
f não têm máximo.

Ex 2-) $f(x,y) = x^2+y^2$

$D = \{(x,y) \ / \ |x| \leq 2, \ |y| \leq 2\}$



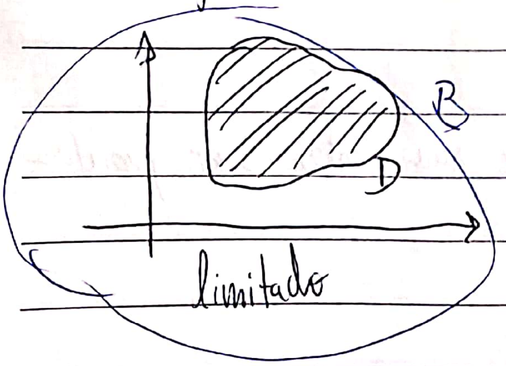
$(2,2), (2,-2), (-2,2), (-2,-2)$
são pontos de máximo de f
f é 8.

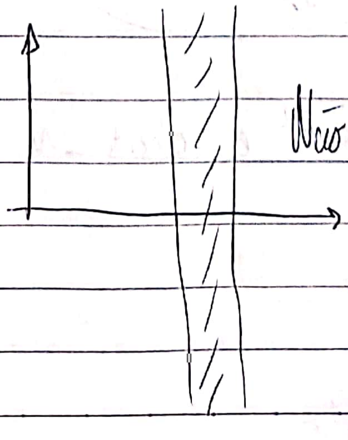
↳ curvas de nível $f(x,y)=c$

Ex 3-) $g(x,y) = x^2+y^2, \quad D = \{(x,y) \ / \ |x| < 2 \text{ e } |y| < 2\}$

g não tem máximo. $\quad g(x,y) < 8, \ \forall (x,y) \in D$
↳ majorante de $g(x,y)$

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se existir uma bola de raio $r > 0$ tal que $\underline{D \subset B}$

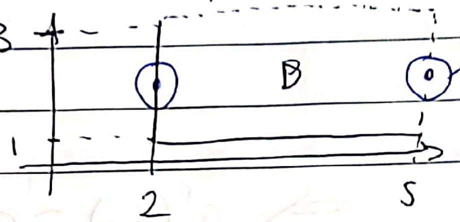




Não é limitado

Um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é ponto de fronteira de um conjunto D se para cada bola aberta de centro (x,y) e raio $r>0$ contém pontos de D e pontos que não pertencem a D.

Ex:



os pontos da parte pontilhada não estão em D. Mas são fronteira de D pois ~~possem~~ ~~pontos de~~ a bola aberta nesses pontos possuem pontos que pertencem a D e pontos que não pertencem a D.

$D = \{(x,y) \,/\, 2 \leq x < 5 \text{ e } 1 \leq y < 3\}$

Fronteira de D: → não pertence a D mas pertence a fronteira de D.

$\{(2,y) \,/\, 1 \leq y \leq 3\} \cup$
$\{(x,1) \,/\, 2 \leq x \leq 5\} \cup$
$\{(5,y) \,/\, 1 \leq y \leq 3\} \cup$
$\{(x,3) \,/\, 2 \leq x \leq 5\}$

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ é Fechado se contem todos os pontos de sua fronteira.

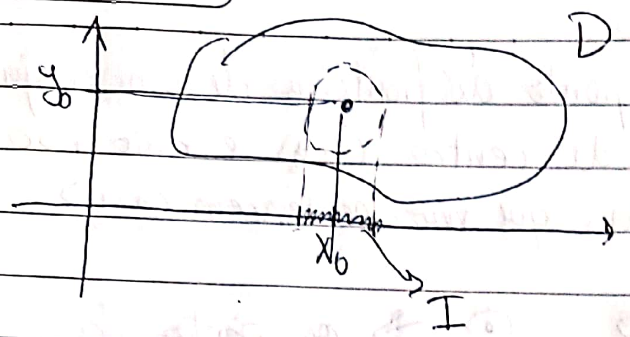
Teorema 1 (Condição necessária para um ponto ser ponto de máximo ou mínimo local)

$D \subset \mathbb{R}^2$ $f: D \to \mathbb{R}$ função.

Seja (x_0, y_0) um ponto interior de D
Suponha que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Se (x_0,y_0) é um ponto de maximo ou mínimo de f então $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

Dem: $g(x) = f(x, y_0)$ Se (x_0,y_0) é ponto de máx/min de f então x_0 é ponto de máx/min de g.



$g(x_0) \geq g(x) \quad \forall x \in I$
$(\leq)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \underbrace{g'(x_0)}_{\text{existe}} \Rightarrow \underbrace{g'(x_0) = 0}$

analogamente p/ y.

Suponha $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in B$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\overset{\leq 0}{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}}{x - x_0} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{cases}$

Entretanto o limite existe $\Rightarrow \underline{= 0}$ //

Se f é diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) é um ponto interior do domínio de f então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0) f(x_0, y_0)$ é paralelo ao plano xz.

Eq: $z = f(x_0, y_0)$ (constante)

Dizemos que (x_0, y_0) é ponto crítico de f se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

Conclusão: Se D_f é aberto e f é diferenciável em D_f os únicos candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os pontos críticos.

aberto / /

Ex1-) $f(x,y) = x^2+y^2+4x-2y+8$, $D=\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (2x+4, 2y-2)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff x=-2$ e $y=1$

$(-2,1)$ é o único ponto crítico de f.

$f(x,y) = (x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)+8-4-1$

$f(x,y) = (x+2)^2+(y-1)^2+3 \geq 3$

$f(-2,1) = 3$

↳ logo $(-2,1)$ é ponto de mínimo de f.

Ex2-) $f(x,y) = x^2-y^2$, $D=\mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) \; (2x,-2y)$

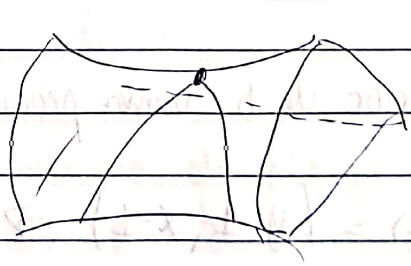
Ponto crítico $(0,0)$; $f(0,0)=0$

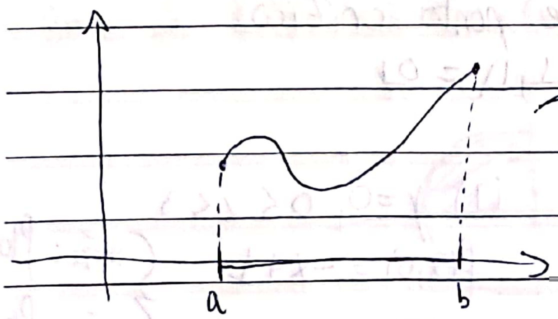
$f(0,y) \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}$

$f(x,0) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

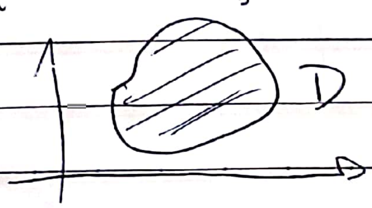
$(0,0)$ não é ponto de máximo nem de mínimo.

$(0,0)$ é ponto de sela





Teorema de Weistrass



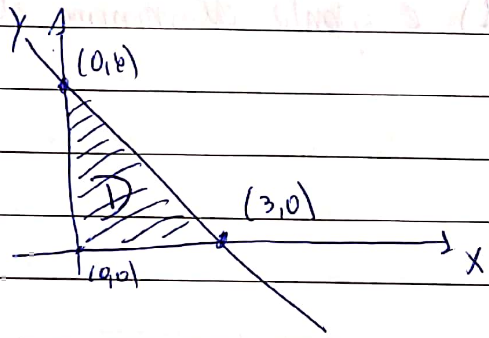
/ /

Teorema de Weistrass

Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e D um conjunto fechado e limitado $D \subset \mathbb{R}^2$

Então f assume um valor máximo e mínimo em D.
isto é, existem (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in D$ tais que $f(x_1, y_1) \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$ e $f(x_2,y_2) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$

Ex: Ache o max e o mín absoluto de $f(x,y) = xy - x - y + 1$, em $D: \{(x,y) / x \geq 0, y \geq 0$ e $2x + y \leq 6\}$



D é limitado, é fechado $>$ compacto

f é contínua em D

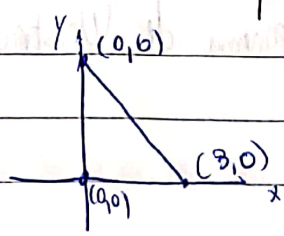
$\Rightarrow$ Teorema de Weistrass garante que f assume máx e mín em D.

Como procurar(?)

(a) no interior de D vamos procurar pontos críticos:

$$\nabla f(x,y) = (y-1, x-1) \Rightarrow (1,1) \text{ é ponto crítico.}$$
$$f(1,1) = 0,$$

(b) na fronteira de D:



(1) $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$
$f(x,0) = -x + 1$ $\begin{cases} \text{máx}: f(0,0) = 1 \\ \text{mín}: f(3,0) = -2 \end{cases}$

(ii) $x=0$ e $0 \leq y \leq 6$

$$f(0,y) = -y+1 \quad \begin{cases} \cancel{f(0,0)=1} \\ f(0,6) = -5 \end{cases}$$

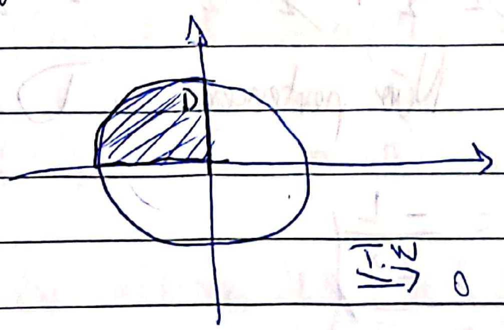
(iii) $\gamma(t) = (t, 6-2t)$, $\quad 0 \leq t \leq 3$

$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{g(t)} = t(6-2t) - t - (6-2t) + 1$$
$$= 6t - 2t^2 - t - 6 + 2t + 1$$
$$g(t) = -2t^2 + 7t - 5, \quad 0 \leq t \leq 3$$
$$g'(t) = -4t+7 \;;\; g'(t) = 0 \iff t = \frac{7}{4}$$

$$\underset{\substack{\| \\ f\left(\frac{7}{4},\frac{5}{2}\right)}}{g(7/4)} = 9/8 \;;\; g(0) = f(0,6) = -5$$
$$g(3) = f(3,0) = -2$$

$$\begin{cases} (0,6) \text{ é ponto de mínimo de } f \\ (7/4, 5/2) \text{ é ponto de máximo de } f. \end{cases}$$

Ex 16-b) Ache o máximo e mínimo de $f(x,y) = xy\,e^{-x^2-y^2}$ em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$



D é fechado e limitado
f é contínua

$\overset{T.W}{\Longrightarrow}$ o problema tem solução.

/ /

Parte A-) Vamos procurar candidatos a máximo e mínimo no interior de D

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y e^{-x^2-y^2} + xy(-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} = y e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{-x^2-y^2}(1-2y^2)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y \cdot e^{-x^2+y^2}(1-2x^2) = 0 \\ x e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0 \text{ ou } (1-2x^2) = 0$$

Se $y=0 \xrightarrow{\text{subisti na 2ª}} x = 0$, $P_1 = (0,0)$

Se $1-2x^2 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ Subistituindo na 2ª $1-2y^2 = 0$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

está na borda

Pontos críticos: $\cancel{(0,0)}$, $\cancel{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, $\cancel{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cancel{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Não pertencem a D.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-1} = \frac{-1}{2e}$$

Parte B) Procurar candidatos a máximo e mínimo na fronteira do conjunto D.

(i) $f(x,0) = 0 \quad , \forall x$

(ii) $f(0,y) = 0 \quad , \forall y$

(iii) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cdot\cos t, \sqrt{2}\cdot\sin t) \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

$f(\gamma(t)) = \underbrace{2\cdot\sin t\cdot\cos t}\, e^{-2} = \underbrace{\frac{\sin(2t)}{e^2}}_{g(t)} \quad , t \in [\pi/2, \pi]$

$g(t) = \frac{1}{e^2}\cdot\sin 2t$

$g'(t) = \frac{1}{e^2}\cdot 2\cdot\cos 2t = 0 \iff \cos 2t = 0 \iff 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\boxed{t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$

$\to t = \frac{3\pi}{4}$ (intervalo)

Candidatos: $g(3\pi/4) = e^{-2}\cdot\sin(3\pi/2) = -e^{-2}$

$g(\pi/2) = e^{-2}\cdot\sin(\pi) = 0$

$g(\pi) = e^{-2}\cdot\sin(2\pi) = 0$

Portanto, o valor máximo de f em D é $0 = f(x,0) = f(0,y)$

O valor mínimo de f é $\frac{-1}{2e} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$3+1=4$

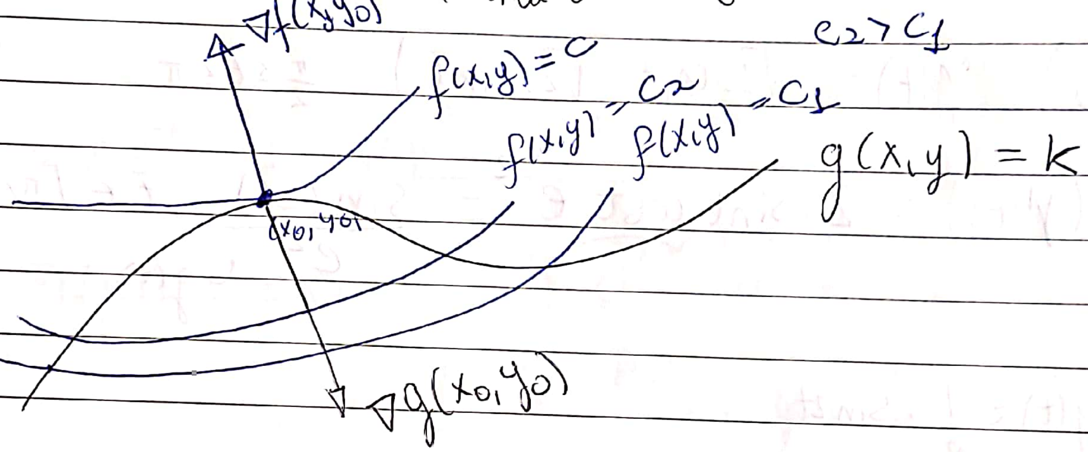
/ /

Multiplicadores de Lagrange:

Objetivo é encontrar candidatos a máximo e mínimo de uma função f restrita a uma condição $g(x,y)=k$ $(B=\{(x,y)\in D_f \mid g(x,y)=k\})$

↳ curva de nível

as curvas de nível se tangenciam



(x_0,y_0) é candidato a máximo ou min quando $\nabla f \parallel \nabla g$ (x_0,y_0)

↱ multiplicador de Lagrange

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\,\nabla g(x_0,y_0)$$

Teorema 1: $A\subset\mathbb{R}^2$ aberto

$f: A\to\mathbb{R}^2$, diferenciável

$g: A\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1

$B=\{(x,y)\in A \mid g(x,y)=k\}$

Suponha $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $\forall (x,y)\in B$

Se $(x_0,y_0)\in B$ for ponto de máx/min local de f em B, então

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\,\nabla g(x_0,y_0), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Exemplo: Determinar o ponto da reta $x+2y=1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.

$$f(x,y) = xy \quad ; \quad \nabla f(x,y) = (y,x)$$

$$g(x,y) = x+2y \qquad \nabla g(x,y) = (1,2)$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=1\}$$

$g(x,y)=1 \rightarrow$ curva de nível de g.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) \parallel \nabla g(x,y) \\ (y,x) \parallel (1,2) \iff \begin{cases} y = \lambda \cdot 1 \\ x = \lambda \cdot 2 \end{cases} \end{cases}$$

$\iff (y,x) \perp (-2,1)$

$\iff -2y+x=0$

$$\begin{cases} -2y+x=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

método de Lagrange

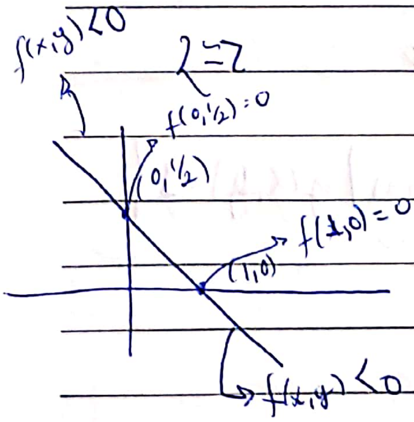
$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 1 \\ x = \lambda \cdot 2 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{4}$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{4}}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ é candidato

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$



Achar máximo de f em $B' = \{(x,y) \mid x+2y=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

B' é fechado e limitado $f(1,0) = f(0,\frac{1}{2}) = 0$ valor mínimo

$\frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ é o valor máximo de f em B'

/ /

Ex: Encontrar os valores máximos e mínimos de $f(x,y)=(x-y)^2$ no conjunto $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

(a) resolver por parametrização.

$\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,2\pi]$ é uma parametrização da curva $x^2+y^2=1$

$$f(\gamma(t)) = (\cos t - \sin t)^2 = \cos^2 t - 2\cos t \cdot \sin t + \sin^2 t = \underbrace{1-\sin(2t)}_{F(t)}$$

$F'(t) = -2\cdot\cos(2t) = 0 \Leftrightarrow \cos(2t)=0 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}+k\pi$

$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $t\in[0,2\pi] \Rightarrow \underbrace{t = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4}$

$F(\pi/4)=0$, $F(3\pi/4)=2$, $F(5\pi/4)=0$, $F(7\pi/4)=2$

$F(0)=1$, $F(2\pi)=1$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{máximo} = 2\\ \text{mínimo} = 0\end{array}}$ em B.

$2 = f(\gamma(3\pi/4)) = f(\gamma(7\pi/4))$

$0 = f(\gamma(\pi/4)) = f(\gamma(7\pi/4))$

(b) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

$f(x,y)=(x-y)^2$; $g(x,y)\ x^2+y^2$, $B=\{(x,y) \mid g(x,y)=1\}$

$\nabla f = (2(x-y), -2(x-y))$

$\nabla g = (2x, 2y) \neq (0,0)\ \forall (x,y) \in B$

Candidatos satisfazem: $\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda 2x \\ -2x + 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = y \\ x = (\lambda - 1)\, y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$-x = (\lambda - 1)(1-\lambda)\,x$$

$$-\cancel{x} = (\lambda - \lambda^2 - 1 + \lambda)\cancel{x}$$

$$(-\lambda^2 + 2\lambda)\, x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow x = y \\ \lambda = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} -x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 1 \to x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \; y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

~~$x = 0 \Rightarrow y = 0$~~ (não satisfaz a 3º equação)

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$

Exemplo (a condição $\nabla f(x_0,y_0) \,//\, \nabla g(x_0,y_0)$ não é suficiente para garantir q (x_0,y_0) é ponto de máximo ou mínimo ~~este~~ local de f em B).

$$f(x,y) = x^3 + y$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x^3\}$$

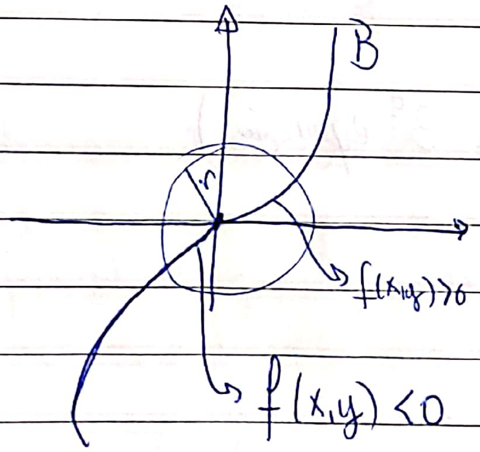
Tomo $g(x,y) = y - x^3$

$\nabla f(x,y) = (3x^2, 1)$; $\nabla g(x,y) = (-3x^2, 1)$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ y = x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 = -3\lambda x^2 \\ 1 = \lambda \cdot 1 \rightarrow \lambda = 1 \\ y = x^3 \rightarrow \underline{y = 0} \end{cases} \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

O único candidato a máx ou min local de f em B é $(0,0)$

$f(0,0) = 0$



$B = \{(x,y) \,/\, y = x^3\}$

$f(x,y) = x^3 + y$

$f > 0$ se $x > 0$

$f < 0$ se $x < 0$

Logo $(0,0)$ não é ponto de máximo nem mínimo.

$A \subset \mathbb{R}^3$ aberto
$f: A \to \mathbb{R}$

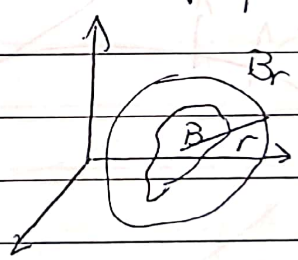
Um conjunto A é aberto em $\mathbb{R}^3$ se, para cada $P(x_0, y_0, z_0) \in A$, existir uma bola (esfera) aberta de centro em P e raio $r>0$ totalmente contida em A.

$$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)\| < r \}$$

Teorema 1: $A \subset \mathbb{R}^3$ aberto, f diferenciável, $(x_0, y_0, z_0) \in A$

Se (x_0, y_0, z_0) é um ponto de máximo ou mínimo de f. Então
$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$

↳ $B \subset \mathbb{R}^3$ é limitado se existir uma Bola B_r ~~que~~ de raio r que contem B.



↳ $B \subset \mathbb{R}^3$ é fechado se B contem todos os pontos de sua fronteira

↳ Pontos de fronteira de um conjunto B são aqueles cujo toda bola aberta centrada no mesmo, de raio $r>0$, contem pontos que pertencem a B e pontos que não pertencem a B.

Teorema de Weistrass: $D \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto fechado e limitado. $f: D \to \mathbb{R}$ é ~~d~~ contínua. Então f assume máximo e mínimo em D.

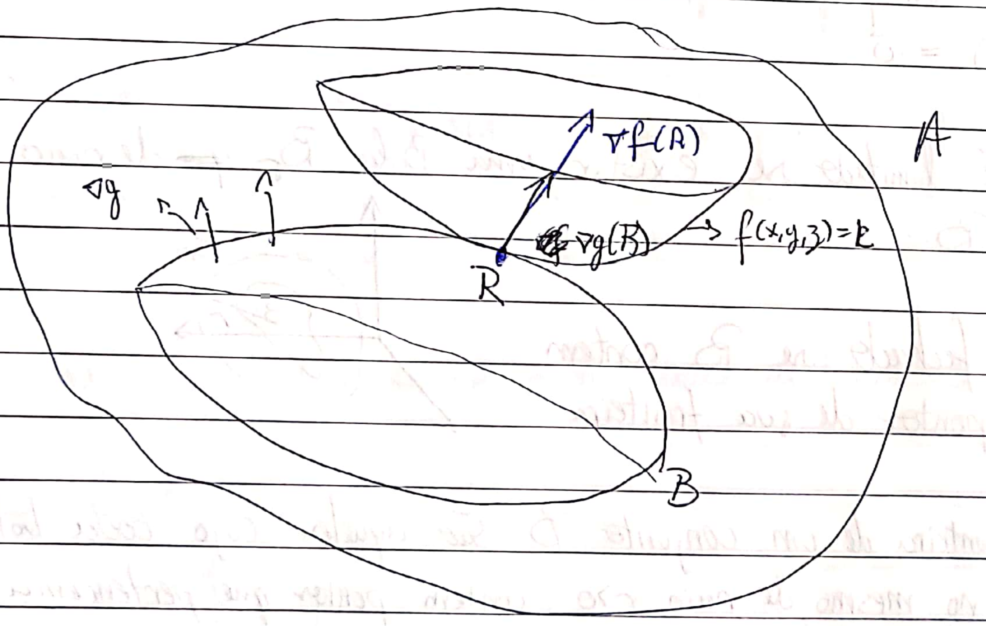
↳

Teorema (Multiplicadores de Lagrange):

$A \subset \mathbb{R}^3$ aberto
$f: A \to \mathbb{R}$ diferenciável
$g: A \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$B = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = c\}$
$\nabla g(x,y,z) \neq 0, \forall (x,y,z) \in B$

Se $(x_0, y_0, z_0) \in B$ for um ponto de máximo ou mínimo local de f em B. Então:



$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0, z_0)$, logo:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Determinar os pontos da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que estão mais próximas do ponto $P=(1,5,-1)$ e os que estão mais distantes de P.

$f(x,y,z)=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2}$; mas pode-se pegar também a função sem a raiz, por simplicidade

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2$$
$$B=\{(x,y,z)\ /\ \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)}=4\}$$

B é limitado | e fechado pois todos os seus pontos são pontos de fronteira.

f é contínua. $\Rightarrow$ T.W garante máximos e mínimos absolutos de f em B.

$$\nabla f(x,y,z)=(2(x+1),\ 2(y-5),\ 2(z+1))$$

$$\nabla g(x,y,z)=(2x,\ 2y,\ 2z)$$

Os candidatos a máx/min satisfazem: $\begin{cases}\nabla f \,//\, \nabla g\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=\lambda x\\ y-5=\lambda y\\ z+1=\lambda z\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$

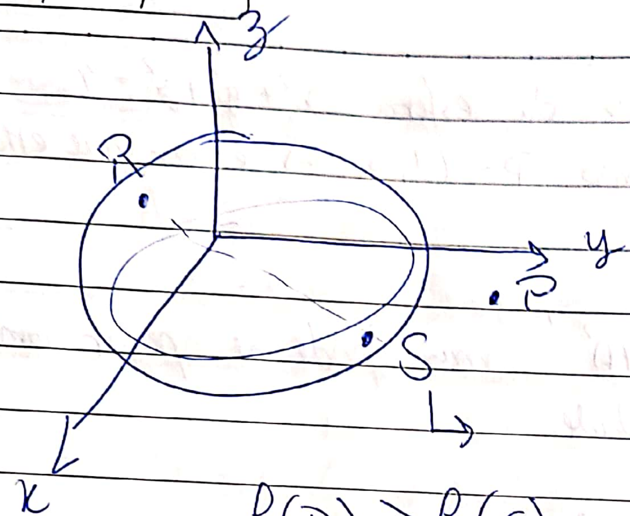
Se $\lambda\neq 1$ $\quad x=\dfrac{1}{1-\lambda},\ y=\dfrac{5}{1-\lambda},\ z=\dfrac{-1}{1-\lambda}$

$$R=\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}},\ \frac{-10}{3\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

antípotos

pontos são antípodas (estão na esfera diametralmente opostos)

$$S=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}},\ \frac{10}{3\sqrt{3}},\ \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$$

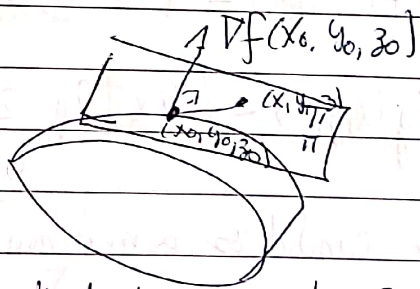


$$\underbrace{f(R)}_{\text{máximo}} > \underbrace{f(S)}_{\text{mínimo}}$$

<u>Exemplo:</u> $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$. Determinar a superfície de nível de f que é tangente ao plano $x+2y+3z=4$. Qual é o ponto de tangência.

<u>Recordar</u>:

$$f = f(x,y,z)$$



$$S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = c\}$$

Se $(x_0, y_0, z_0) \in S$

o gradiende de f no ponto é o vetor normal do plano

Uma equação para o plano tangente a S em P é

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)] = 0$$

Resolução: procurar um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in$ plano tal que $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \parallel \vec{n}$

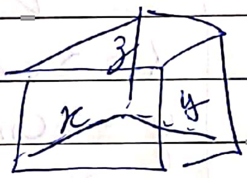
$\vec{n} = (1,2,3)$

$$\nabla f = (2x, 2y, 4z)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda . 1 \\ 2y = \lambda . 2 \\ 4z = \lambda . 3 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Ex 37: Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27 cm^2 de papelão

x, y, z em cm



$$f(x,y,z) = xyz$$

sem tampa

Área total = 27 cm^2 $\Rightarrow$ $\underbrace{2xz + 2yz + xy}_{g(x,y,z)} = 27$

Candidatos são os pontos (x,y,z) que satisfazem: $\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g(x,y,z) = 27 \end{cases}$

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z+y) \iff (y-2\lambda)z = \lambda . y \Rightarrow z = \lambda y / (y-2\lambda) \quad \neq 0 \\ xz = \lambda(2z+x) \iff (x-2\lambda)z = \lambda x \rightarrow z = \dfrac{\lambda x}{x-2\lambda} \\ xy = \lambda(2x+2y) \\ 2xz + 2yz + xy = 27 \end{cases}$$

$$\frac{\lambda y}{y-2\lambda} = \frac{\lambda x}{x-2\lambda} \quad = \quad \lambda y(x-2\lambda) = \lambda x(y-2\lambda)$$

$$-2\lambda^2 y = -2\lambda^2 x$$

$$\boxed{x = y \text{ ou } \cancel{\lambda = 0}}$$

/ /

Se $y=x$ então

$$f(g(x)) = h(x)$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

↳ 3º equação: $x^2 = \lambda(4x)$

$$x^2 - 4\lambda x = 0$$

$$x(x-4\lambda) = 0 \rightarrow \cancel{x=0}$$

$$\rightarrow \boxed{x = 4\lambda = y} \Rightarrow 4^{\circ}\text{ eq}$$

$$2(4\lambda)z + 2(4\lambda)z + (4\lambda)^2 = 27$$

$$16\lambda z + 16\lambda^2 = 27$$

1º eq: $(4\lambda)z = \lambda(2z + 4\lambda) \Longleftrightarrow \boxed{z = 2\lambda}$

$$\Rightarrow 16\lambda^2 = 9$$

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 3\text{ cm} \\ y = 3\text{ cm} \\ z = 2\text{ cm} \end{array}}$$

Lagrange com

Duas restrições:

$A \subset \mathbb{R}^3$ aberto

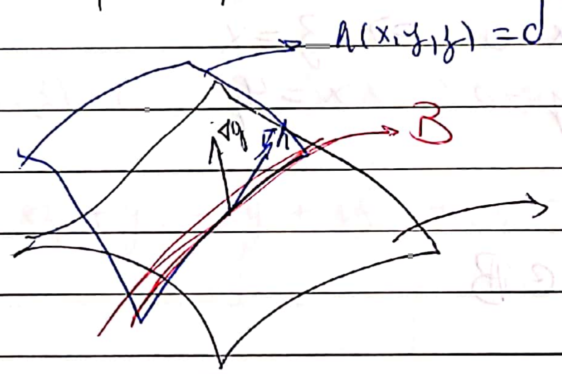
$f: A \to \mathbb{R}$ diferenciável

$g, h: A \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$B = \{(x,y,z) \,/\, g(x,y,z) = c$ e $g, h(x,y,z) = d\}$

duas Superfícies de nível

os pontos pertencem a intersecção de duas superfícies (uma curva)



Se $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z)$ $\forall (x,y,z) \in B \neq (0,0,0)$ e se $(x_0, y_0, z_0) \in B$ for um ponto de máx/min local em B, então:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \alpha \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \beta \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ pertence ao subespaço gerado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$

Exemplo 1: Determinar os pontos mais afastados da origem cuja as coordenadas satisfazem: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$

elipsoide plano

Definir: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ que calcula o quadrado da distância até a origem

/ /

$$B = \{(x,y,z) \ / \ \underbrace{x^2+4y^2+z^2=4}_{g(x,y,z)} \ \text{e} \ \underbrace{x+y+z=1}_{h(x,y,z)} \}$$

$$\nabla g \times \nabla h = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-8y)$$

$$\nabla g \wedge \nabla h = \vec{0} \iff \begin{cases} 8y-2z=0 \\ 2z-2x=0 \\ 2x-8y=0 \end{cases} \implies \begin{matrix} z = x \\ x = 4y \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(4y,\ y,\ 4y),\ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\nabla g \wedge \nabla h \neq \vec{0},\ \forall (x,y,z) \in B$$

Se f assume valor máximo ou mínimo em B, então ∇f estará no sub-espaço gerado por ∇g e ∇h

Os candidatos a solução satisfazem:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \alpha \nabla g(x,y,z) + \beta \nabla h(x,y,z) \\ x^2+4y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Como ∇f é combinação linear de ∇g e ∇h, logo a trinca formada por $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ é L.D e portanto seu determinante é nulo.

$\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ é um conjunto linearmente dependente

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\| $$

$$\nabla f \cdot (\nabla g \wedge \nabla h)$$

$$\|$$

$$(2x, 2y, 2z) \cdot [(8y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-8y)] = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (4y-z,\ z-x,\ x-4y) = 0$$

$$4xy - \cancel{xz} + yz - xy + \cancel{xz} - 4yz = 0 \Rightarrow 3xy - 3yz = 0$$

$$3y(x-z) = 0$$

$$\underline{y=0} \text{ ou } \underline{x=z}$$

(1) Se $y=0$ $\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow z = 1-x$

$$x^2+(1-x)^2=4$$

$$x^2+1-2x+x^2=4$$

$$2x^2-2x-3=0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Se $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$ (e $y=0$) $\rightarrow P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$

Se $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}$ (e $y=0$) $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

(2) se $z = x$: $\begin{cases} x^2+4y^2+x^2=4 \\ 2x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+4y^2=4 \\ 2x+y=1 \Rightarrow \boxed{y=1-2x} \end{cases}$

$x^2+2y^2=2$

$x^2+2(1-2x)^2=2$

$x^2+2(1-4x+4x^2)=2$

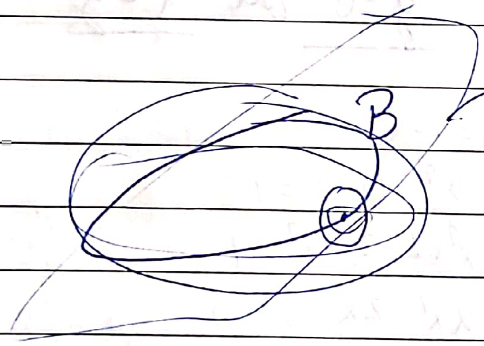
$x^2+8x=0$

$x(9x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0=z \\ x=\frac{8}{9}=z \end{cases}$

$P_3=(0,1,0)$

$P_4=\left(\frac{8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{8}{9}\right)$

B é limitado poi $B \subset$ elipsóide



$\left.\begin{array}{l} \text{B é fechado} \\ \text{f é contínua} \end{array}\right\}$ T.W garante máx e mín em B

$f(P_1)=f(P_2)=4$ ← máximo de f em B

P_1 e P_2 são os pontos de B que estão mais distantes da origem.

$f(P_3)=1$

$f(P_4)=\frac{171}{81}$ (<3)

/ /

Exercício 22a-) Encontrar o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ no conjunto compacto C

C: intersecção do plano $2z = 2x + y + 4$ c/ a parte do hiperbolóide $4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ com $z > 0$.

Pelo T. Weierstrass, como f é contínua e C é compacto, o problema tem solução.

$B = \{(x,y,z) \in A \,/\, 2z - 2x - y = 4 \text{ e } 4x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z > 0\}$ é aberto

Considero: $f: A \to \mathbb{R}$

Candidatos: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ 2z - 2x - y = 4 \\ 4x^2 + y^2 - z^2 = -1 \end{cases}$ $\rightarrow \det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$

$\nabla g \text{ e } \nabla h \neq (0,0,0) \; \forall (x,y,z) \in B$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2z \\ -2 & -1 & 2 \\ 8x & 2y & -2z \end{vmatrix} = 0 \iff \cancel{-2z} + 4y + \cancel{2z} - 8x - 2z(2y - 4x) = 0$$

$$4y - 8x - 4yz + 8xz = 0$$

$$4y(1 - z) - 8x(1 - z) = 0$$

$$(1 - z)(4y - 8x) = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ y = 2x \end{cases}$$

(a) Se $z = 1$ $\begin{cases} 2 - 2x - y = 4 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 = y \end{cases}$ impossível

(b) Se $y = 2x$:

$$\begin{cases} 2z - 2x - (2x) = 4 \\ 4x^2 + (2x)^2 - z^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z - 4x = 4 \\ 8x^2 - z^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 2 + 2x}$$

$$8x^2 - (2+2x)^2 = -1$$
$$8x^2 - (4 + 8x + 4x^2) = -1$$
$$4x^2 - 8x - 3 = 0 \iff x = \frac{8 \pm 4\sqrt{7}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$P_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2},\ 2 + \sqrt{7},\ 4 + \sqrt{7}\right)$$

$$P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2},\ 2 - \sqrt{7},\ 4 - \sqrt{7}\right)$$

$f(P_1) = -19 - 6\sqrt{7} \longrightarrow$ mínimo

$f(P_2) = -19 + 6\sqrt{7} \longrightarrow$ máximo

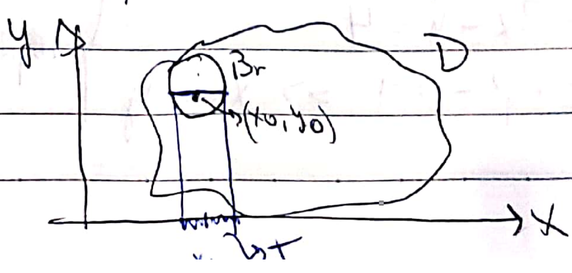
Condições Necessárias para que um ponto seja de máximo ou de mínimo local.

$D \subset \mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}$ de classe C^2

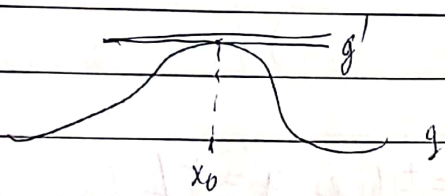
Seja (x_0, y_0) é um ponto no interior do domínio tal que:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_r(x, y)$$



Seja $g(x) = f(x, y_0)$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$ aberto

$\Rightarrow$ x_0 é ponto de máximo local de g.
g é de classe C^2



$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x_0) = 0 \iff \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \text{e} \\ g''(x_0) \leq 0 \iff \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \end{cases}$$

Se tomarmos $h(y) = f(x_0, y)$, $\forall y \in J$ aberto

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ \text{e} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0 \end{cases}$$

Teorema: $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto
$f: D \to \mathbb{R}$ classe C^2

Se (x_0, y_0) for ponto de máximo local de f, então

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$

Se (x_0, y_0) for ponto de mínimo local de f, então:

$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$

/ /

Exemplo: Determine os candidatos a extremantes locais de $f(x,y) = x^3+y^3-3x+3y+4$

$D = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2-3$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff x = \pm 1$ e $y = \pm 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2-3$

Pontos críticos: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6$ $(1,1)$ é candidato a mínimo

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = -6$ $(1,-1)$ não é extremante é um ponto de sela.

Analogamente $(-1,1)$ é ponto de sela)

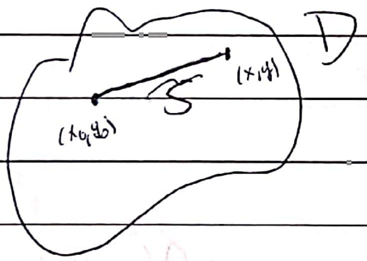
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -6$ $(-1,-1)$ é candidato a máximo

Polinômio de Taylor de ordem 1

$$P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y) = P_1(x,y) + R(x,y)$$

$$R(x,y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)^2\right]$$



para algum $(\bar{x},\bar{y}) \in S$

Se (x_0,y_0) é um ponto crítico de f então:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})\underbrace{(x-x_0)}_{h}{}^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)\underbrace{(y-y_0)}_{k} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)^2\right]$$

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

$$a\left[h^2 + \frac{2b}{a}hk + \frac{c}{a}k^2\right]$$

$$Q(h,k) = a\left[h^2 + \frac{2b}{a}hk + \left(\frac{b}{a}k\right)^2 - \left(\frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{c}{a}k^2\right]$$

/ /

$$a\left[\left(h+\frac{b}{a}k\right)^2+\frac{ac-b^2}{a^2}k^2\right]$$

$$a\left[\left(h+\frac{b}{a}k\right)^2+\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}}{a^2}k^2\right]=Q(h,k)$$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}>0$ e $a>0 \Rightarrow Q(h,k)>0$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}>0$ e $a<0 \Rightarrow Q(h,k)<0$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}<0$ $\begin{cases} a=0 \Rightarrow b\neq 0 \\ a\neq 0 \end{cases}$

$a=0, b\neq 0$

$Q(h,k)=2bhk+ck^2$

$Q(h,1)=2bh+c$] $\exists\, h$ de modo que $Q(h,1)>0$ e $Q(h,1)<0$

Se $a\neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}\neq 0$

$Q(1,0)=a$

$Q\left(\frac{b}{a},-1\right)=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}}{a}$ <0 $\rightarrow$ sinal contrário a $Q(1,0)$

<u>Definição</u>: f de classe C^2 em $D\subset\mathbb{R}^2$

$H(x,y)=$ $\cancel{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\end{vmatrix}}$ $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Hessiano}}$ de f

Teorema: Se (x_0, y_0) é um ponto interior do domínio de f (C^2) e se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ então:

(a) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é Mínimo local

(b) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é Máximo Local

(c) Se $H(x_0, y_0) < 0$ (x_0, y_0) é um ponto de sela.

Voltando ao exemplo 1:

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

$(1,1)$ era candidato a p. mín local
$(-1,-1)$ era candidato a máx local

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} \Rightarrow H(x,y) = 36xy$$

$H(1,1) = 36$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 \rightarrow$ mínimo local

$H(-1,-1) = 36$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 \Rightarrow$ máximo local

/ /

Observações: o teorema não informa o caso $H(x,y) = 0$

Exemplo: $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$

Procurar pontos extremantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y^2\left(3(1+x)^2\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10y\,(1+x)^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ 1+x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Se $y = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$ $(0,0)$

Se $x = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2 \cancel{= 0}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \cancel{2+5y^2 \cdot 6(1+x)} & 30y(1+x)^2 \\ 30y(1+x)^2 & 10(1+x)^3 \end{vmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = \underline{20} > 0 \quad \underline{f(-2,1) = -1}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \therefore (0,0)$ é ponto de mínimo local e não global