Universidade de São Paulo

Relatividade Especial

Versão de 29 de julho de 2021

João Lucas Rodrigues

1 Introdução

Trataremos primeiramente a respeito da relatividade especial de Einstein. Objeto de estudo que trata dos fenômenos físicos com velocidade próximas a velocidade da luz ($c = 299792458 m/s$); no entanto nos restringindo primeiramente a um espaço que não possui curvatura, ou seja que não há gravidade.

Motivado por diversos estudos e experimentos anteriores como o experimento de Michelson-Morley (1881-1887) que determinou que não existia um referencial privilegiado chamado de Éter. Einstein afirmou os seguintes postulados:

- As Leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
- A velocidade da luz no vácuo é constante e invariante em qualquer referencial ou direção e independente do movimento da fonte.
- Homogeneidade do tempo e isotropia do espaço.

A partir disso temos que não ha um momento privilegiado no tempo, nem uma posição privilegiada no espaço. Isso faz com que não se possa ter funções que possuem posições como variáveis pois na mudança de referencial a física não seria a mesma, fazendo com que a dependência esteja nos intervalos. A consequência direta disso é que as transformações de mudanças entre referenciais inerciais precisam ser transformações lineares. Se considerarmos inicialmente uma mudança de um referencial S para outro S' com velocidade relativa $\vec{v} = v\hat{\mathbf{i}}$. A passagem de referencial deve ser algo do tipo:

$$\begin{cases} x' = \gamma x + bt \\ t' = Ax + Bt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

O movimento relativo de O' temos: $\begin{cases} S' : x' = 0 \\ S : x = vt \end{cases} \implies 0 = \gamma vt + bt \implies b = -\gamma v \implies \underline{x' = \gamma(x - vt)}$

Com o movimento relativo de O: $\begin{cases} S' : x' = -vt \\ S : x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -vt' = -\gamma vt \\ t' = Bt \end{cases} \implies B = \gamma$ Com isso temos então:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt) \\ t' = Ax + \gamma t \end{cases}$$

Temos também que a velocidade da luz precisa ser uma constante em ambos os referenciais, logo:

$$x = ct \to x' = ct' \implies \begin{cases} ct' = \gamma(c - v)t \\ t' = Act + \gamma t = (Ac + \gamma)t \end{cases} \implies ct' = Ac^2 + \gamma ct = \gamma ct - \gamma vt$$

$$\implies Ac^2 = -\gamma v \implies A = -\frac{\gamma\beta}{c}$$

Onde β é definido por: $\beta = \frac{v}{c}$
Outra propriedade de deveras importância é que a passagem de referencial $S \to S'$ também possa ser inversível, em outra palavras $S' \to S$; mais precisamente $(x, t, v) \leftrightarrow (x', t', -v)$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Juntando com as outras transformações já determinadas temos então:

$$x' = \gamma x - \gamma vt = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma^2 vt' - \gamma^2\beta^2 x' \implies$$

$$\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

No entanto apenas a raiz positiva possui sentido físico. No limite ($v << c$) precisamos recair novamente sobre a transformação de Galileu da mecânica clássica; $x' = x - vt$. Chagando então as Transformações de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \beta = \frac{v}{c}; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

É possível notar que essas leis de transformações resultaram em algumas consequências:

- Coordenadas sempre reais e uma velocidade limite

Devemos ter $1 - \beta^2 > 0 \implies |v| < c$ em outras palavras, a velocidade entre referenciais nunca pode ser superior ou igual a velocidade da luz. Essa representa a velocidade máxima de transmissão de sinais.

- Quebra de Simultaneidade

Como agora o tempo varia com o referencial e não é mais algo absoluto, como suposto na relatividade galileana, dois eventos simultâneos em um referencial não serão simultâneos em outro referencial.

- Causalidade, conservação do sinal

Em um referencial S há a medição de um intervalo $\Delta t > 0$ teremos que na mudança para um outro referencial S' o sinal do intervalo será conservado, ou seja $\Delta t' > 0$.

- Dilatação do tempo e Contração do espaço

Uma definição útil sera a seguinte: chamemos de tempo próprio(τ) o tempo marcado no decorrer de um evento que acontece no mesmo ponto no espaço, pode se pensar ainda como a medida de tempo de um relógio carregado por um observador ao longo da trajetória.
Um relógio em repouso em $S(x=0)$ o tempo medido é o tempo próprio, τ, realizando a mudança para um referencial S':

$$t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) = \gamma\tau$$

Como $\gamma > 1$ temos então a dilatação do temporal. O mesmo pode ser pensado com o espaço, imaginando uma barra que se estende de um ponto A até um ponto B que para um referencial S em repouso o comprimento da barra mede $l_0 = \Delta x = x_B - x_A$, essas medições em um referencial S' que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ são dadas por:

$$\begin{cases} x_B = \gamma(x'_B + vt') \\ x_A = \gamma(x'_A + vt') \end{cases} \implies x_B - x_A = \gamma(x'_B + vt') - \gamma(x'_A + vt')$$

$$l_0 = \gamma(x'_B - x'_A) = \gamma l' \implies l' = \frac{l_0}{\gamma}$$

Constituindo então, a contração do comprimento da barra.

Olhando para as transformações de Lorentz e calculando seus respectivos quadrados temos:

$$\begin{cases} x'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 = \gamma^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) = \frac{1}{1-\beta^2}(x^2 + \beta^2(ct)^2 - 2\beta x(ct)) \\ (ct')^2 = \frac{1}{1-\beta^2}((ct)^2 + \beta^2x^2 - 2\beta x(ct)) \end{cases}$$

Note que fazendo $(ct')^2 - x'^2$ obtemos:

$$\begin{aligned} (ct')^2 - x'^2 &= \frac{1}{1-\beta^2}[(ct)^2 + \beta^2x^2 - 2(ct) - x^2 - \beta^2(ct)^2 + 2(ct)] \\ &= \frac{1}{1-\beta^2}[(1-\beta^2)(ct)^2 - (1-\beta^2)x^2] \end{aligned}$$

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 \tag{1}$$

Isso leva fortemente a introdução de um termo invariante entre referenciais inerciais denominado Intervalo entre dois eventos, inspirado em 1 temos:

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{2}$$

Temos também a forma diferencial de 2 muitas vezes chamada de elemento de linha:

$$\boxed{ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \tag{3}$$

A partir do sinal do intervalo entre dois eventos, podemos categoriza-lo de tres maneiras distintas:

- Tipo Espaço $\Delta s^2 < 0$

Para esse tipo, temos que os eventos não podem possuir nenhuma conexão causal, pois para isso acontecer, uma velocidade maior que a velocidade da luz seria necessária. Além disso, temos que sempre irá existir um referencial onde 2 eventos ocorrem simultaneamente; a variação temporal na transformação de referencial escreve-se: $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$ se a velocidade de separaçao for $v = \frac{\Delta t c^2}{\Delta x}$ temos entao $\Delta t' = 0$

- Tipo Tempo $\Delta s^2 > 0$

Para intervalo tipo tempo, temos que a causalidade entre os eventos é preservada, ou seja os eventos podem ter alguma conexão causal entre si. Para esse caso sempre existe um referencial onde 2 eventos ocorrem no mesmo ponto no espaço, pelas transformaçoes de Lorentz temos:

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - vt) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases} \qquad \text{se,} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \implies \begin{cases} \Delta x' = 0 \\ \Delta y' = 0 \\ \Delta z' = 0 \end{cases}$$

Nesse referencial em especifico, os eventos ocorrem em repouso, logo o intervalo de tempo entre esses dois eventos é o intervalo de tempo próprio. $s_{12}^2 = (c\tau_{12})^2$. Logo o intervalo de tempo próprio por eventos do tipo tempo é um invariante de Lorentz.

- Tipo Luz $\Delta s^2 = 0$

Para eventos tipo luz, temos que é referente uma onda eletromagnética. Para todos esses tipos de intervalo, é possível construir um cone de luz referente a cada evento no espaço. Para o movimento de uma partícula nesse espaço quadridimensional por exemplo, temos que ela pode se mover apenas para pontos que estejam dentro do cone de luz, invocando um intervalo do tipo tempo mantendo assim a causalidade dos eventos, no caso a causalidade do movimento da partícula.

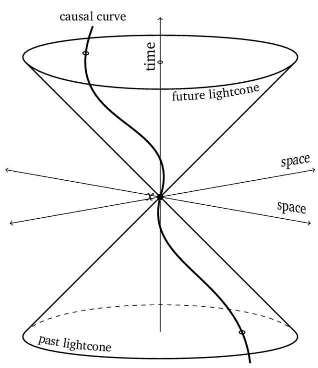

Figura 1: Cone de Luz e caminho de uma partícula, imagem de Daniel Siemssen

2 4-Vetores e o Espaço de Minkowski

Utilizando uma descrição com um maior rudimento matemático, podemos tratar da relatividade em um espaço de 4 dimensões chamado Espaço tempo de Minkowski. Neste espaço retratamos as coordenadas de uma maneira mais compacta por x^μ onde:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Note então que podemos construir o intervalo invariante como sendo o seguinte, adotando a partir de agora a convenção de soma de Einstein:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{4}$$

Onde g é o chamado tensor métrico, dado nesse caso por:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Com sua inversa dada por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

Podemos ainda relembrar das transformações de Lorentz, que agora assumem a forma

$$x' = \Lambda x$$

$$\boxed{x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu} \tag{5}$$

Subsistindo 5 no intervalo temos o seguinte:

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \ = g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta$$

mas utilizando a lei de transformação em 5 temos:

$$g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \Lambda^\beta{}_\mu x^\mu$$

Tendo então:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \ = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda^\beta{}_\mu x^\nu x^\mu$$

Finalmente

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \tag{6}$$

Ou ainda, de uma maneira mais compacta:

$$g = \Lambda^t g \Lambda \tag{7}$$

Todas as matrizes Λ que satisfazem 7 compõem um grupo denominado Grupo de Lorentz. Tirando-se o determinante obtemos:

$$det\Lambda = \pm 1$$

Quando a transformação de Lorentz possui determinante positivo +1 a chamamos de própria e imprópria no caso contrário. Para seu primeiro termo $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ temos que a transformação é dita ortócrona, preservando assim o sentido temporal, para o caso em que $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ temos que a transformação é dita não-ortócrona, invertendo assim o sentido temporal. Com as diferentes combinações de determinante e valor do primeiro termo, temos os Setores do Grupo de Lorentz, com o de maior importância sendo $L_+^\uparrow$ pois dos 4 setores é o único que forma um subgrupo, chamado grupo de Lorentz próprio ortócrono.

Temos ainda que devida a 7 não apenas os boost compõem o grupo mas também operadores T e P que dizem respeito a reversões espaciais e e temporais respectivamente. Ainda temos também os elementos do grupo $SO(3)$ que representam as rotações espaciais, que mantém invariante a distância espacial. Como as matrizes $R \in SO(3)$ são matrizes 3x3 temos o seguinte: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R \end{pmatrix}$

Para uma direção arbitrária da velocidade $\vec{v} = c\vec{\beta}$ onde $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ temos:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \ , \ \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta_i$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}$$

A respeito de produtos escalares no espaço de Minkowski, podemos definir a seguinte forma bilinear,

$$g : M^4 \times M^4 \to \mathbb{R}$$

Onde

$$g(a, b) = a \cdot b$$

Definindo a ação da forma bilinear nos vetores de base

$$g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu e_\nu \equiv g_{\mu\nu}$$

Aplicando então a forma em dois 4-vetores

$$g(A^\mu e_\mu, B^\nu e_\nu) = A^\mu B^\nu g(e_\mu, e_\nu), \text{ pela linearidade da forma}$$

$$g(A^\mu e_\mu, B^\nu e_\nu) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = s^2$$

Essa é uma possibilidade de construção de um produto interno em M^4, mas podemos nos perguntar ainda o que acontece quando agimos com a forma bilinear sobre apenas um vetor ao invés de dois, em outras palavras quanto vale

$$g(v, \cdot) = g_{\mu\nu} v^\nu$$

Essa entidade matemática possui apenas um índice livre ,μ, devido a contração com o índice ν do 4-vetor. Essa entidade diz respeito a uma forma linear, chamada de 1-forma que pertence ao espaço dual do espaço vetorial em questão. Temos então que $g(v,\cdot)$ é um funcional linear que associa um elemento do espaço de Minkowski, no caso um 4-vetor a um elemento do corpo dos reais. A este 1-forma,chamado também de vetor covariante, é conveniente denotar por:

$$\boxed{g(v,\cdot) = g_{\mu\nu}v^{\nu} \equiv v_{\mu}} \tag{8}$$

Também podemos escrever v^{ν} da seguinte maneira:

$$\boxed{v^{\nu} = g^{\nu\mu}x_{\mu}} \tag{9}$$

Com isso é possível reconstruir o intervalo da seguinte maneira

$$ds^2 = dx^{\mu}dx_{\mu} \tag{10}$$

Devido a invariância do intervalo devemos ter

$$ds^2 = dx^{\mu}dx_{\mu} = dx'^{\nu}dx'_{\nu}$$

No entanto sabemos que o vetor contravariante se transforma como (5), logo

$$dx_{\mu}dx^{\mu} = dx'_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}dx^{\mu}$$

$$\implies dx_{\mu} = dx'_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu} \text{ logo,}$$

$$dx_{\mu}F^{\mu}{}_{\alpha} = dx'_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}F^{\mu}{}_{\alpha}$$

Onde F é a matriz inversa de Λ, ou seja

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu}F^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\alpha}$$

$$F^{\mu}{}_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}$$

Note que chegamos também na regra de transformação de uma 1-forma. Enquanto o 4-vetor se transforma com Λ temos que seu dual transforma com Λ^{-1}

$$\boxed{x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}x_{\nu}} \tag{11}$$

Uma pergunta pertinente que surge naturalmente é: quanto vale Λ^{-1}? Se unirmos (11) , (8) e (5) temos o seguinte:

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}x_{\nu} = g_{\mu\alpha}x'^{\alpha}$$

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}$$

$$x^{\beta} = g^{\beta\nu}x_{\nu} \text{ substituindo tudo teremos:}$$

$$(\Lambda)^{-1\nu}{}_{\mu}x_{\nu} = g_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}g^{\beta\nu}x_{\nu} \tag{12}$$

$$\boxed{(\Lambda)^{-1\nu}{}_{\mu} = g_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}g^{\beta\nu} \equiv \Lambda_{\mu}{}^{\nu}} \tag{13}$$

3 Dinâmica Relativística

Agora podemos começar a pensar em outros conceitos importantes, como velocidade, momento, energia, força, etc. Na Física não relativística temos que a maioria dessa grandezas possui alguma relação indireta ou direta com o tempo, como por exemplo uma derivada temporal. No espaço de Minkowiski isso não é possível pois o tempo não é mais um parâmetro universal mas sim em linhas gerais apenas mais uma coordenada do "espaço". Afim de encontrar uma forma covariante para as leis da dinâmica, isto é que seja valida em todos referenciais inerciais. Primeiramente, devemos encontrar algum parâmetro invariante para poder diferenciar com respeito ao mesmo. Lembrando do intervalo invariante

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

Em um segundo referencial S' tal qual os eventos ocorram no mesmo ponto espacial, temos que o tempo decorrido é o tempo próprio, ou seja:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Como o intervalo entre eventos é invariante:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \text{ lembrando que } d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$\frac{c^2 dt^2}{\gamma}$$

Comparando as duas expressões chegamos então a:

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2} \tag{14}$$

Tendo em vista que o tempo próprio é um invariante de Lorentz, podemos utilizar o mesmo como um parâmetro para diferenciação.

Agora inspirado pelas definições da mecanica classica, podemos definir a 4-Velocidade como:

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}} \tag{15}$$

Podemos calcular explicitamente seus argumentos da seguinte forma

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau} \text{ usando (14) temos}$$

$$u^0 = c\gamma$$

Concomitantemente;

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^i}{dt} = \gamma\vec{v}$$

Chegamos então a seguinte 4-Velocidade:

$$u^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Temos também que a 1-forma associada a 4-velocidade vai ser:

$$u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = (c\gamma, -\gamma\vec{v})$$

E sua norma vale

$$u^\mu u_\mu = c^2 \tag{17}$$

A partir do 4-vetor posição e da 4-velocidade podemos definir uma 4-aceleração:

$$\boxed{a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}} \tag{18}$$

Realizando cálculos similares aos feitos para a 4-velocidade, chegamos no valor explicito da 4-aceleração:

$$a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \gamma^4 \frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}$$

É importante notar que no referencial de repouso momentâneo $\vec{v} = 0$, no entanto a 4-aceleração não se anula, $a^\mu = (0, \vec{a})$. Ela apenas se anulara se a aceleração medida no referencial de repouso instantâneo for nula(aceleração própria). Ainda é possível perceber que realizando os devidos cálculos, a^μ é um vetor do tipo espaço e além disso é sempre ortogonal a 4-velocidade.

$a^\mu u_\mu = 0$ de fato, derivando (17) com respeito ao tempo próprio

$$\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = \frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu + u^\mu\frac{du_\mu}{d\tau} = 0$$
$$a^\mu u_\mu + u^\mu a_\mu = 0 \implies a^\mu u_\mu = 0$$

Podemos agora definir o 4-momento da seguinte maneira:

$$\boxed{P^\mu = mu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix}} \tag{19}$$

Nota-se que a norma do 4-momento é

$$P^\mu P_\mu = m^2c^2 \tag{20}$$

Com base nisso, podemos reescrever o 4-momento como

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Onde $\vec{p}$ é definido como o momento linear relativístico:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Baseando-se em todas as definições acima e na equação de Newton da mecânica clássica, podemos chegar na equação do movimento covariante a partir da 4-força definida por:

$$\boxed{f^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}} \tag{22}$$

Por motivos de construção, P^μ e f^μ são sempre ortogonais

$$P^\mu f_\mu = 0$$

Lembrando da definição de força da mecânica newtoniana

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \frac{d}{dt}(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}})$$

Obtemos as componentes explicitas da 4-força:

$$f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{F} \cdot \vec{v} \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix}$$

Lembremos que a potencia clássica tem a forma $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, com isso

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}) \text{ logo temos}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{23}$$

É importante ressaltar ressaltar que a equação do movimento covariante possui dentro de si a informação sobre a Lei de Conservação da energia, se $f^0 = 0$ teremos $\frac{dE}{dt} = 0$. Pensando em questões de energia, o 4-momento pode ser rescrito como

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Calculando a norma de (25) e comparando com (20) teremos:

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \text{ logo;}$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{25}$$

4 Eletrodinâmica Covariante

Lembrando das Leis de Maxwell

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Entretanto temos que $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = 0$ não é mais valido, logo não podemos escrever $\vec{E}$ em função de um potencial escalar, mas $\vec{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}$ continua valendo logo:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} + \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Este rotacional nulo pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$\boxed{\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \tag{26}$$

Sabemos que os potenciais não são completamente determinados, podemos pensar a respeito de que mudanças podemos fazer sem alterar o o campo elétrico e o campo magnético. Aplicando uma transformação $\vec{A} \to \vec{A}'; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}$ e impondo que essa alteração não muda $\vec{B}$, ou seja $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\alpha}\right) \to \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\alpha}}_{=0} \to \alpha = \boldsymbol{\nabla}\lambda$$

Concomitantemente; $\phi \to \phi', \phi' = \phi + \beta$ então:

$$\vec{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\boldsymbol{\nabla}(\phi + \beta) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda\right) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \underbrace{-\boldsymbol{\nabla}\beta - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\lambda)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\nabla\beta + \nabla\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0$$

$$\implies \nabla \underbrace{(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t})}_{\text{independe de } \vec{r}} = 0$$

$$\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t} = \kappa(t)$$

$$\implies \beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

Onde $\kappa(t)$ pode ser absorvido em λ sem alteração do gradiente, por meio de $\lambda' = \lambda + \int_0^t \kappa(t')dt'$

As transformações que mantem $\vec{E}$ e $\vec{B}$ inalterados são chamadas de Transformações de Gauge, que são do tipo:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \tag{27}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \tag{28}$$

Onde λ é uma função arbitrária. Ou seja, os potenciais nunca são univocamente determinados, é sempre possível impor alguma condição especial sobre eles, em particular a Gauge de Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{29}$$

Lembrando agora da equação da continuidade do eletromagnetismo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Podemos construir um 4-vetor chamado de 4-Corrente que contenha tanto a densidade de carga quanto a densidade de corrente para então escrever a equação da continuidade em sua forma covariante;

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \tag{30}$$

Com isso, a equação da continuidade pode ser reescrita como:

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} \tag{31}$$

Onde

$$\partial_\mu \equiv (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla) \tag{32}$$

Com isso também temos

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\boldsymbol{\nabla} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Além disso, com a Gauge de Lorentz (29) colocamos sobre pé de igualdade os potenciais, a partir das leis de Maxwell é possível obter:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

O que nos leva a definir um operador diferencial chamado d'Alembertiano:

$$\boxed{\partial^\mu\partial_\mu = -\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box^2} \tag{34}$$

Logo e utilizando um sistema de unidades Gaussianas:

$$\Box^2\phi = 4\pi\rho$$

$$\Box^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

O que nos leva a construção de um 4-Potencial:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Portanto, agora as equações dos potenciais assumem a forma

$$\Box^2 A^\mu = \frac{4\pi}{c}J^\mu \tag{36}$$

Temos com isso que as transformações de Gauge são escritas na forma

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$$

Em especial a Gauge de Lorentz fica

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Lembrando que os campos em função dos potenciais se escrevem como

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$\vec{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\vec{A}$$

Se calcularmos explicitamente:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

E assim por diante, então podemos utilizar uma entidade matemática para agrupar tanto E quanto B em função do 4-Potencial, definindo assim o Tensor de Faraday:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \tag{37}$$

Explicitamente temos

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

é possível notar que F se trata de um tensor anti-simétrico,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

E além disso:

$$F_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} F^{\alpha\beta} g_{\nu\beta}$$

Em termos mais práticos o que vai acabar acontecendo é a troca $\vec{E} \to -\vec{E}$ Com isso podemos reescrever as Equações de Maxwell em sua forma covariante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \implies \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \implies \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

No entanto, se introduzirmos um tensor de quarto rank totalmente anti-simétrico:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 \text{ para permutação par de } (0,1,2,3) \\ -1 \text{ para permutação ímpar} \\ 0 \text{ para índices repetidos} \end{cases}$$

Temos ainda que

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Com o auxilio desse tensor podemos construir

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$$

Explicitamente:

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

De uma maneira prática é obtido fazendo $E \to B$ e $B \to -E$ em $F^{\alpha\beta}$. Com isso temos que

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

Pode ser reescrito como:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$$

O que nos leva finalmente as Equações de Maxwell na forma Covariante:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta} \tag{38}$$

$$\boxed{\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0} \tag{39}$$