/

Classe de Equivalência: $[c] = \{a \in A, a \sim c\}$

↳ Conjunto de todos os elementos que são equivalentes a c.

Cosets à Esquerda:

G grupo, H subgrupo de G; $x \overset{H}{\underset{e}{\sim}} y \iff x^{-1}y \in H$, $x, y \in G$

↳ classe de equivalência: $[g]_e = \{g' \in G; g' \sim g\}$
$= \{g' \in G; g^{-1}g' \in H\}$

$(G/H)_e \equiv$ Coleção de todas as classes de equivalência de G por $\overset{H}{\underset{e}{\sim}}$ → coset à esquerda de G por H.

Considere agora a aplicação: $G \longrightarrow (G/H)_e$
$g \longmapsto [g]_e$

↳ Aplicação quociente à esquerda.

Coset à Direita:

G grupo, H subgrupo de G; $x \overset{H}{\underset{r}{\sim}} y \iff xy^{-1} \in H$, $x, y \in G$

↳ Classe de equivalência: $[g]_r = \{g' \in G; g' \sim g\}$
$= \{g' \in G; g'g^{-1} \in H\}$

$(G/H)_r \equiv$ Coleção de todas as classes de equivalência de G por $\overset{H}{\underset{r}{\sim}}$ → Coset à Direita de G por H

Considere agora a aplicação:

$$G \longrightarrow (G/H)_r$$
$$g \longmapsto [g]_r$$

↳ Aplicação quociente a direita.

Subgrupos Normais:

G grupo, N subgrupo de G. N é um subgrupo normal de G se:

$$gng^{-1} \in N, \ \forall g \in G \ \circ \ \forall n \in N.$$

Notação: $N \triangleleft G$; $G \triangleright N$

↳ todo subgrupo de um grupo Abeliano G é normal.

Proposição: G grupo, N subgrupo de G; se: $N \triangleleft G$, ou seja N for um subgrupo normal de G; então $\underbrace{(G/N)_e = (G/N)_r}$.

$\Rightarrow [g]_e = [g]_r \ \forall g \in G.$

Com isso, temos a seguinte definição: $[g] \equiv [g]_N \equiv [g]_r = [g]_e$ $\forall g$; Definimos então, o Coset de G por N:

$$G/N := (G/N)_e = (G/N)_r; \quad \boxed{G/N = \{[g], g \in G\}}$$

↳ Grupo Quociente

Temos então que G/N, o quociente de G por N, é o conjunto de todas as classes de equivalência de G por N; lembrando que: $\underline{[g] = \{g' \in G; g^{-1}g' \in N\}}$

↳ Isso é a classe de equivalência de um $g \in G$ se fizermos o mesmo $\forall g \in G$ teremos G/N.

Ações à direita e à esquerda sobre o coset por um subgrupo normal

Se $N \triangleleft G$, podemos definir:

$\alpha : G \times (G/N) \longrightarrow G/N$ (Ação à Esquerda)

$(g, [f]) \longmapsto \alpha(g, [f]) = \alpha_g([f]) := [gf]$

$\beta : G \times (G/N) \longrightarrow G/N$

$(g, [f]) \longmapsto \beta(g, [f]) = \beta_g([f]) := [fg]$

O Grupo Quociente de G por N:

↳ Se tivermos um subgrupo normal N de um grupo G, conseguimos transformar a classe de equivalência G/N em um grupo; basta definirmos um produto adequado.

$((G/N), \cdot)$ é um grupo denominado grupo quociente de G por N, onde:

$\cdot \equiv [g][h] = [gh]$

↳ Associativo

↳ $[e] \rightarrow$ elemento neutro

↳ elemento neutro de G

↳ $([g])^{-1} = [g^{-1}]$ elemento inverso.

Se G e G' são dois grupos e $\varphi: G \to G'$ é um homomorfismo, temos que Ran(φ) é um subgrupo de G' e ker(φ) é um subgrupo normal de G

Teorema Fundamental de Homomorfismos: G e G' dois grupos; $\varphi: G \to G'$ homomorfismo. Seja N subgrupo normal de G ($N \triangleleft G$) com $N \subset \ker(\varphi)$. Então, a aplicação $\psi: G/N \to G'$; $\psi([g]) := \varphi(g)$ para cada $g \in G$, é um homomorfismo de G/N em G'.

Primeiro Teorema de Isomorfismo: Sejam G e H grupos e seja $\varphi: G \to H$ um homomorfismo. Então:

$G/\ker\varphi \simeq \text{Ran}(\varphi)$ (isomorfismo sendo dado por $\psi([g]) = \varphi(g)$, $g \in G$.)

↳ Adote $N = \ker\varphi$ e $G' = \text{Ran}\,\varphi$ no teorema anterior.

O Centro de um Grupo: Seja G um grupo, o conjunto dos elementos de G que possuem a propriedade de comutarem com todos os elementos de G é denominado Centro de G:

$$Z(G) := \{h \in G \mid hg = gh, \forall g \in G\}$$

↳ Nunca é um conjunto vazio, possui pelo menos a identidade do grupo e_G.

↳ $Z(G)$ é um subgrupo normal de G.

↳ G é Abeliano $\iff Z(G) = G$

Produto Direto/Soma Direta de dois grupos

G e H dois grupos, é possível fazer do produto cartesiano $G \times H$ um grupo. Definindo o seguinte produto:

$(G \times H, \cdot) \rightarrow$ É um grupo.

$$\cdot \equiv \underline{(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)}$$

↳ Associativo

↳ (e_G, e_H) elemento neutro.

↳ $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ elemento inverso.

$(G \times H, \cdot) \longrightarrow$ Produto Direto de G e H ou Soma Direta de G e H

↳ notação: $G \times H$ ou $G \oplus H$

Produto Semidireto de dois Grupos:

Outra maneira, mais geral de transformar $G \times H$ em um grupo. Essa maneira requere uma ação de G em H por automorfismos de H. Uma ação (à esquerda) de G sobre H por automorfismos é uma função $\alpha : G \times H \longrightarrow H$; $(g, h) \longmapsto \alpha_g(h)$ com.

I-) $\forall g \in G$, $\alpha_g(\cdot) : H \longrightarrow H$ é um automorfismo de H; $\alpha_g(h)\, \alpha_g(h') = \alpha_g(hh')$

sendo que $\alpha_g(\cdot) : H \rightarrow H$ é bijetora com $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$

II-) $\forall h \in H$ vale $\alpha_{e_G}(h) = h$

III-) $\forall h \in H$ vale $\alpha_g(\alpha_{g'}(h)) = \alpha_{gg'}(h)$ $\forall g, g' \in G$.

Logo tenemos: G e H grupos; $\alpha: G \times H \to H$ ação à esquerda de G sobre H por automorfismo. Então $G \times H$ é um grupo com o produto definido por:

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 \alpha_{g_1}(h_2))$$

↳ Associativo

↳ (e_G, e_H) identidade

↳ $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, \alpha_{g^{-1}}(h^{-1}))$ elemento neutro.

$(G \times H, \cdot) \longrightarrow$ produto semidireto de G por H

↳ Denotado por $G \circledS_\alpha H$

↳ Caso α seja a aplicação identidade ($\alpha_g(h) = h, \forall g, \forall h$) temos que o grupo pelo produto semidireto e direto são iguais; $G \circledS_\alpha H = G \oplus H$.

Suporte de uma Função:

$f: X \to G$; uma função em um grupo G. O suporte de f é o
$\neq \emptyset$

conjunto de todo $x \in X$; $f(x) \neq e_G$; ou seja conjunto dos pontos de X

que não são levados na identidade de G.

$$Supp(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq e_G\}$$

↳ Se o conjunto for finito, dizemos que f é de suporte finito.

Seja $F(x) = \{f : X \to \mathbb{Z}; f$ é suporte finito $\}$

↳ coleção de todas as funções $X \to \mathbb{Z}$ de suporte finito.

↳ $F(x)$ possui a estrutura de um grupo Abeliano, $f, f' \in F(x)$

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$$

$F(x) \to$ Grupo Abeliano livremente gerado pelo conjunto X.

$x \in X$, $\delta_x \to$ função característica de x:

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, \text{ se } y = x \\ 0, \text{ se } y \neq x \end{cases}$$

$\delta_x \in F(x)$, Como cada $f \in F(x)$ tem suporte finito, podemos escrevê-lo da forma:

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n \delta_{x_n}$$

onde $\{x_1, \ldots, x_N\} = \text{supp}(f)$; $a_i \in \mathbb{Z}$

$a_k = f(x_k)$

por ex: $f(x) = \begin{cases} -2, & x=4 \\ 3, & x=2 \\ 0, & x=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2\delta_4 + 3\delta_3 + 0\delta_1$

Seja J um conjunto, $j \in J$, um elemento de $F(x)$ dado por:

$$r_j := \sum_{i=1}^{n(j)} \alpha_{j,i} \, \delta_{x_{j,i}}$$

Seja o conjunto agora: $\mathcal{R} := \{r_j, j \in J\}$

↳ denominados 'relações'

Agora seja $R(\mathcal{R})$ subgrupo de $F(x)$ formado pelos elementos

$$s \in R \iff s = s_1 r_{j_1} + \ldots + s_m r_{j_m}$$

$r_{ji} \in \mathcal{R}$; $s_i \in \mathbb{Z}$

Por ser um subgrupo de um grupo abeliano, $R(\mathcal{R})$ é normal.

Definimos então: o grupo Abeliano livremente gerado por X, módulo as relações $\mathcal{R}$ como $F(x)/R(\mathcal{R})$

$[a]_R = e \;\; \forall a \in R(\mathcal{R})$; isso equivale dizer que os elementos de $\mathcal{R}$ são identificados como zero

↳ (refletem identidades que não existiam antes, e agora foram impostas em $F(x)/R(\mathcal{R})$)

Produto Tensorial de dois grupos Abelianos:

Dado dois grupos abelianos: $(G_1, +, e_{G_1})$ e $(G_2, +, e_{G_2})$

e seja $F(X) = F(G_1 \times G_2)$ grupo abeliano livremente gerado por

$G_1 \times G_2$ e seja $\mathcal{R}$ o conjunto de relações dado por:

$$\mathcal{R} := \{ r \in F(G_1 \times G_2) \mid r = \overbrace{(g_1, g_2)}^{\delta_{g_1,g_2}} + \overbrace{(g_1, g_3)}^{\delta_{g_1,g_3}} - (g_1, g_2 + g_3) = 0$$

$$\text{e } (g_1, g_2) + (g_3, g_2) - (g_1 + g_3, g_2) = 0 \}$$ e seja também

$R(\mathcal{R}) = \{ mr, m \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R} \}$ subgrupo Abeliano de $F(G_1 \times G_2)$

Como $R(\mathcal{R}) \triangleleft F(G_1 \times G_2)$; isso nos leva a:

$$\boxed{G_1 \otimes G_2 := F(G_1 \times G_2) / R(\mathcal{R})}$$

↳ Produto Tensorial (algébrico) dos grupos Abelianos G_1 e G_2.

Os elementos são denotados por $g_1 \otimes g_2 \in G_1 \otimes G_2$

c/ as propriedades:

$$\begin{cases} (g_1 + g_1') \otimes g_2 = g_1 \otimes g_2 + g_1' \otimes g_2 \\ g_1 \otimes (g_2 + g_2') = g_1 \otimes g_2 + g_1 \otimes g_2' \end{cases}$$

$e_{G_1} \otimes e_{G_2} \rightarrow$ elemento neutro

$-(g_1 \otimes g_2) = (-g_1) \otimes g_2 = g_1 \otimes (-g_2) \rightsquigarrow$ elemento inverso.

Produto Tensorial de dois espaços vetoriais:

U, V, espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, tendo em vista que U, V são grupos abelianos, o grupo $U \otimes V$ está definido pelo procedimento anterior. Tomemos $X = U \otimes V$ e consideremos o subconjunto de $F(X)$ definido por:

$$\mathcal{R} := \{ r \in F(U \otimes V) \mid r = (\alpha u) \otimes v - u \otimes (\alpha v),\ \alpha \in \mathbb{K}, u \in U, v \in V \}$$

E seja $R(\mathcal{R})$ subgrupo de todas as combinações lineares finitas; então:

$$U \otimes V := F(U \otimes V) / R(\mathcal{R})$$

E além disso definimos o produto $\alpha(u \otimes v)$; $\alpha \in \mathbb{K}$ por:

$$\alpha(u \otimes v) := (\alpha u) \otimes v = u \otimes (\alpha v)$$

Logo temos que os elementos de $U \otimes V$ são da forma:

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \otimes v_k$$

$$\alpha \left(\sum_{k=1}^{N} u_k \otimes v_k \right) = \sum_{k=1}^{N} (\alpha u_k) \otimes v_k = \sum_{k=1}^{N} u_k \otimes (\alpha v_k)$$

Com isso, $U \otimes V$ torna-se um espaço vetorial, definido como produto Tensorial de U e V. O mesmo procedimento pode ser realizado com n espaços vetoriais.

$V_1, \ldots, V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$

$$\alpha(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = (\alpha v_1) \otimes \ldots \otimes v_n = v_1 \otimes (\alpha v_2) \otimes \ldots \otimes v_n = v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_{n-1} \otimes (\alpha v_n)$$

$$v \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n + \mu \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n = (v + \mu) \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n$$

$V_1, \ldots, V_n \rightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$

Sabemos que um vetor $v \in V_k$, $k = 1, \ldots, n$ pode ser escrito como combinação linear de uma base do seu espaço vetorial.

$$V_k \ni v = \sum_{j=1}^{n_k} v^j e_j^{(k)} \equiv v^j e_j^{(k)} \quad \rightarrow \text{Convenção de Einstein}$$

$\hookrightarrow \{e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)}\}$

Logo temos que: $v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes \ldots \otimes v_{(n)} = (v_{(1)}^{j_1} e_{j_1}^{(1)}) \otimes (v_{(2)}^{j_2} e_{j_2}^{(2)}) \otimes \ldots \otimes (v^{j_n} e_{j_n}^{(n)})$ pelas propriedades de produtos tensoriais $((\alpha v) \otimes u = v \otimes (\alpha u) = \alpha (v \otimes u))$

$$v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes \ldots \otimes v_{(n)} = \underbrace{v_{(1)}^{j_1} v_{(2)}^{j_2} \ldots v_{(n)}^{j_n}}_{\text{Componentes de um elemento}} \underbrace{(e_{j_1}^{(1)} \otimes e_{j_2}^{(2)} \otimes \ldots e_{j_n}^{(n)})}_{\text{base em } V^1 \otimes \ldots \otimes V^n}$$

$\Rightarrow \{e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}^{(n)}\} \rightarrow$ Base em $V^{(1)} \otimes \ldots \otimes V^{(n)}$; logo:

$$T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \rightarrow \boxed{T = t^{j_1 \ldots j_n} e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}^{(n)}}$$

$\hookrightarrow$ componentes do Tensor T na base $\{e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}^{(n)}\}$

Representação Tensorial de Grupos

Relembrando: Representação de um grupo é uma ação à esquerda, de um grupo G em algum espaço vetorial V: $\Pi : G \times V \rightarrow V$ tal que $\forall g \in G : \Pi_g : V \rightarrow V$ seja um operador linear.

$$\Pi(g_1)\Pi(g_2) = \Pi(g_1 g_2) \; ; \; \Pi(e) = \mathbb{1} \; ; \; \Pi(g^{-1}) = (\Pi(g))^{-1}$$

Agora, sendo G grupo e U e V espaços vetoriais, com representações de G, $\Pi^U(g)$ e $\Pi^V(g)$ respectivamente. Podemos definir a representação de G no produto tensorial de U e V (i.e. $U \otimes V$), definida por $\Pi^{U\otimes V}$ ou $\Pi^U \otimes \Pi^V$:

$$\boxed{\Pi^{U\otimes V}(g)\,(u \otimes v) := \left(\Pi^U(g)u\right) \otimes \left(\Pi^V(g)v\right)}$$

onde:

$$\Pi^{U\otimes V}(g_1)\,\Pi^{U\otimes V}(g_2) = \Pi^{U\otimes V}(g_1 g_2)$$

$$\Pi^{U\otimes V}(e) = \mathbb{1}_{U\otimes V}$$

$$\left(\Pi^{U\otimes V}(g)\right)^{-1} = \Pi^{U\otimes V}(g^{-1})$$; além disso,

$$\Pi^{U\otimes V}(g_1)\left(\Pi^{U\otimes V}(g_2)(u\otimes v)\right) = \Pi^{U\otimes V}(g_1)\left(\left(\Pi^U(g_2)u\right) \otimes \left(\Pi^V(g_2)v\right)\right)$$

$$= \left(\Pi^U(g_1)\,\Pi^U(g_2)u\right) \otimes \left(\Pi^V(g_1)\,\Pi^V(g_2)v\right)$$

$$= \left(\Pi^U(g_1 g_2)u\right) \otimes \left(\Pi^V(g_1 g_2)v\right)$$

Dado um elemento $T \in U \otimes V$; sabemos, que podemos escrevê-lo da seguinte maneira: (utilizando sempre a notação de Einstein):

$$T = t^{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} \{e_1, \dots, e_m\} \to \text{base em } U \\ \{f_1, \dots, f_n\} \to \text{base em } V \end{array}$$

Como fica a ação representação de $\Pi^{U\otimes V}(g)$ sobre T?

Pela definição de representação tensorial temos:

$$\Pi^{U\otimes V}(g)\,T = \Pi^{U\otimes V}(g)\left(t^{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j\right)$$ ⇝ não esquecer da convenção de Einstein

↳ escalar

$$= t^{ij}\,\Pi^{U\otimes V}(g)\left(\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j\right)$$; pela definição temos:

$$= t^{ij}\left[\left(\Pi^{U}(g)\,\vec{e}_i\right) \otimes \left(\Pi^{V}(g)\,\vec{f}_j\right)\right]$$; mas:

$$\Pi^{U}(g)\,\vec{e}_i = \Pi^{U}(g)^{a}{}_{i}\,\vec{e}_a$$ → Representação de Matriz:

$$\boxed{M_{ij} \equiv M^{i}{}_{j}}$$

$$\Pi^{V}(g)\,\vec{f}_j = \Pi^{V}(g)^{b}{}_{j}\,\vec{f}_b$$

$$\Rightarrow \Pi^{U\otimes V}(g)\,T = t^{ij}\left[\left(\underbrace{\Pi^{U}(g)^{a}{}_{i}}_{\text{escalar}}\,\vec{e}_a\right) \otimes \left(\underbrace{\Pi^{V}(g)^{b}{}_{j}}_{\text{escalar}}\,\vec{f}_b\right)\right]$$

$$\Pi^{U\otimes V}(g)\,T = t^{ij}\,\Pi^{U}(g)^{a}{}_{i}\,\Pi^{V}(g)^{b}{}_{j}\left(\vec{e}_a \otimes \vec{f}_b\right)$$

$$\boxed{T' = t'^{ab}\left(\vec{e}_a \otimes \vec{f}_b\right)}$$

onde $$\boxed{t'^{ab} = t^{ij}\,\Pi^{U}(g)^{a}{}_{i}\,\Pi^{V}(g)^{b}{}_{j}}$$

↳ Transformação dos componentes de um tensor pela representação de um grupo.

Podemos fazer com que um grupo aja sobre um tensor, (pode ser entendido como uma mudança de base) isso faz com que suas componentes se transformem mediante a lei de transformação encontrada.

Dual Algébrico de um Espaço Vetorial:

V, espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma certa aplicação $\ell : V \to \mathbb{K}$ é dita ser um funcional linear se:

$$\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y)$$

O conjunto contendo todo os funcionais lineares $V \to \mathbb{K}$, é denominado de Espaço dual Algébrico de $V \equiv V'$; com a seguinte relação:

$$(\alpha \ell + \beta m)(x) := \ell(\alpha x) + m(\beta x)$$

Isso faz de V' um espaço vetorial.

$x \in V$, $\ell \in V'$; $\ell(x) :\equiv \langle \ell, x \rangle$

↳ outra notação, denominada "pairing" entre ℓ e x.

$$\langle \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2, x \rangle = \alpha_1 \langle \ell_1, x \rangle + \alpha_2 \langle \ell_2, x \rangle$$

$$\langle \ell, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle = \alpha_1 \langle \ell, x_1 \rangle + \alpha_2 \langle \ell, x_2 \rangle$$

Base Dual: Seja primeiramente, $\{e_1, \dots, e_n\}$ base em V. Temos então:

$V \ni v = v^k e_k$. Seja $e^j \in V'$ definido por: $e^j(v) = v^j$

$\Rightarrow e^j(v^k e_k) = v^j$; logo para algum $\ell \in V'$ temos:

$$\ell(v) = \ell(v^k e_k) = v^k \ell(e_k) = e^k(v) \ell(e_k)$$

$$\Rightarrow \ell(v) = \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k) e^k(v) \rightarrow \boxed{\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k) e^k}$$

logo: $\{e^1, \dots, e^n\} \rightarrow$ Base de V'

↳ Base dual da base $\{e_1, \dots, e_n\}$

Dado uma base num espaço vetorial V, podemos associá-la a uma base no espaço dual, essa recebe o nome de Base dual da base $\{e_1, \ldots e_n\}$

$$V \ni v = v^k e_k \qquad e^j(v^k e_k) = v^j$$

$$V' \ni l = l_k e^k \qquad \boxed{e^j(e_k) = \delta^j{}_k}$$

$$\boxed{\langle e^j, e_k \rangle = \delta^j{}_k}$$

$$\langle e^j, v^k e_k \rangle = v^j = \langle e^j, v \rangle$$

$l \in V'$

↳ Covetor

Somas Diretas de Espaços Vetoriais:

Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre num mesmo corpo $\mathbb{K}$, tendo em vista que ambos V_1 e V_2 são grupos Abelianos, podemos realizar a soma direta $V_1 \oplus V_2$: $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$; $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ onde a soma é dada por:

$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') =: (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$; podemos ainda definir a multiplicação por escalar (de $\mathbb{K}$) da seguinte maneira:

$$\alpha (v_1 \oplus v_2) := (\alpha v_1) \oplus (\alpha v_2).$$

Com isso, temos que $V_1 \oplus V_2$ é um espaço vetorial, denotado como soma direta dos espaços vetoriais V_1 e V_2.

↳ O mesmo pensamento se aplica quando consideramos uma coleção finita de espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_n$.

Representações de Grupos:

Relembrando: uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear inversível $\Pi(g): V \to V$ tal que:

1- $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$ (homomorfismo de G em $GL(V)$)

2- $\Pi(e) = \mathbb{1}$

3- $\Pi(g^{-1}) = (\Pi(g))^{-1}$

↳ Ação à esquerda de G em V através de operadores lineares inversíveis.

• Representação Trivial: $\Pi(g) = \mathbb{1}, \forall g \in G$.

Intertwiners: Seja G um grupo, V_1 e V_2 dois espaços vetoriais, com representações Π_1 e Π_2 de G, respectivamente. Dado um operador $U: V_1 \to V_2$ tq.

$$U\Pi_1(g) = \Pi_2(g)U, \quad \forall g \in G.$$

U é dito ser um intertwiner/operador de entrelaçamento de Π_1 e Π_2.

↳ Se o operador U for inversível, dizemos que Π_1 e Π_2 são representações equivalentes.

↳ no sentido de relações de equivalência.

Subespaços Invariantes: Dado G grupo, V espaço vetorial, Π representação de G em V. Dado um subespaço vetorial de V, W, é dito ser um subespaço invariante por Π se $\boxed{\Pi(g)w \in W, \forall w \in W}$, em outras palavras, $\Pi(G)W \subset W$

Os subespaços invariantes dados por $W = \{0\}$, $W = V$ são ditos triviais.

↳ Se os únicos subespaços invariantes forem os subespaços triviais, dizemos que Π é uma representação irredutível de G em V.

Representações Irredutíveis:

V, espaço de dimensão finita $n \geq 2$, Π representação de um grupo G em V redutível (possui um subespaço invariante W), $\dim W = m < n$, então, podemos encontrar uma base em V tal que $\Pi(g)$ possui representação matricial por blocos:

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} \Pi_1(g) & \phi(g) \\ 0 & \Pi_2(g) \end{pmatrix}$$

onde $\Pi_1(g)$ matriz $m \times m$, $\Pi_2(g)$ matriz $(n-m) \times (n-m)$, ambos representações de G. e $\phi(g)$ matriz $m \times (n-m)$.

Uma representação Π é totalmente redutível se for redutível e se V puder ser escrito como soma direta de subespaços invariantes $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, logo em uma base $\Pi(g)$ pode ser escrita como:

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} \Pi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & \Pi_k(g) \end{pmatrix}$$

com Π_i sendo representação invariante de V_i ; $\Pi = \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_k$

Se Π é totalmente redutível e cada Π_i é irredutível, Π é completamente redutível.

Proposição: V espaço vetorial complexo de dimensão finita, dotado de um produto escalar e seja Π uma representação de um grupo G por operadores unitários (c/ relação ao produto escalar). Então, ou Π é irredutível ou completamente redutível.

Lema: V, esp. vetorial complexo, dotado de um produto escalar

Π representação de grupo G por operadores unitários. Se W é invariante por Π (subespaço)

então $W^{\perp}$ também é.

→ Uma representação Π é dita irredutível se os únicos operadores (→ p/ operadores)

$A: V \to V$ para quais valem: $A\Pi(g) = \Pi(g) A$

$\forall g \in G$ são da forma $A = \lambda \mathbb{1}$

Lema de Schur: Se Π_1 e Π_2 são duas representações irredutíveis de um grupo G

em espaços vetoriais não-triviais V_1, V_2, e $A: V_1 \to V_2$ é um intertwiner

de Π_1 e Π_2, ou seja, $A\Pi_1(g) = \Pi_2(g) A$, $\forall g \in G$, então A é injetor ou $A = 0$.

Corolário: Se o Lema de Schur é satisfeito e A for bijetor, então A é

único. (a menos de multiplicação por escalar),

Corolário: Se Π é uma representação irredutível complexa de dimensão

finita de um grupo G, então Π é irredutível para operadores.

Corolário: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e seja Π uma

representação irredutível de um grupo G por operadores limitados agindo

em $\mathcal{H}$. Seja $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador limitado e agindo em $\mathcal{H}$ que

satisfaça $A\Pi(g) = \Pi(g) A$ $\forall g \in G$. Então $A = \lambda \mathbb{1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corolário: As representações irredutíveis complexas de dimensão finita de um grupo Abeliano

são unidimensionais.

Representações irredutíveis para operadores:

Uma representação Π de G em V é dita ser uma representação irredutível para operadores se a propriedade

$$A\,\Pi(g) = \Pi(g)\,A$$

$\forall g$, $A: V \to V$ for valida apenas para multiplo da identidade

$A = \lambda \mathbb{1}$

↳ toda representação irredutível complexa de dimensão finita é irredutível para operadores.

→ Lema de Schur

↳ Se A for bijetor, ele é único a menos de multiplicação por escalar

• Π irredutível, A operador c/ $A\Pi(g) = \Pi(g)A$ $\forall g \Rightarrow A = \lambda \mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

As representações irredutíveis complexas de dimensão finita de um grupo Abeliano são unidimensionais.

Proof: Como G é abeliano e Π irredutível, vale $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(h)\Pi(g)$ $\forall g, h \in G$

↳ faz com que $\Pi(h) = \lambda \mathbb{1}$, como Π é irredutível, sua dimensão é 1.

Formas Multilineares:

$\to$ sobre $\mathbb{K}$

Dado um espaço vetorial que é a soma direta de espaços vetoriais; $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, $n \in \mathbb{N}$. Uma forma n-linear é uma aplicação $\underline{\omega : V_1 \oplus \dots \oplus V_n \to \mathbb{K}}$ tal que para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v_j, v_j' \in V_j$, $j = 1, \dots, n$ valem as relações.

1- $\omega(v_1 \oplus \dots \oplus v_{i-1} \oplus (\alpha v_i + \beta v_i') \oplus v_{i+1} \oplus \dots \oplus v_n)$

$$=$$

$$\alpha \omega(v_1 \oplus \dots \oplus v_{i-1} \oplus v_i \oplus \dots \oplus v_n) + \beta \omega(v_1 \oplus \dots \oplus v_{i-1} \oplus v_i' \oplus \dots \oplus v_n)$$

<u>nota-se que:</u>

$$\omega(v_1 \oplus \dots \oplus v_{i-1} \oplus 0 \oplus v_{i+1} \oplus \dots \oplus v_n) = 0$$

$\hookrightarrow$ Se um dos argumentos é o vetor nulo, a forma se anula

<u>DEF</u>: $M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) \to$ conjunto de todas n-formas lineares em $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$

Conseguimos definir o seguinte produto: $\omega_1, \omega_2 \in M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ temos:

$$(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2)(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) := \alpha_1 \omega_1(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) + \alpha_2 \omega_2(v_1 \oplus \dots \oplus v_n)$$

Disso faz de $M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$ um <u>espaço vetorial</u>.

<u>Base de $M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$</u>: Seja $\{e^{(k)}_1, \dots, e^{(k)}_{m_k}\}$ uma base em V_k e $\{e^{(k)1}, \dots, e^{(k)m_k}\}$ correspondente base dual canônica. Cada vetor $v_k \in V_k$ pode ser escrito como $v_k = \sum_{a=1}^{m_k} (v_k)^a e^{(k)}_a$

Definimos $m^{a_1 \dots a_n} \in M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$ por:

$$m^{a_1 \dots a_n}(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) = m^{a_1 \dots a_n}\left(\sum_{b_1=1}^{m_1} (v_1)^{b_1} e^{(1)}_{b_1} \oplus \dots \oplus \sum_{b_n=1}^{m_n} (v_n)^{b_n} e^{(n)}_{b_n}\right) := (v_1)^{a_1} \dots (v_n)^{a_n}$$

Disso sai que:

$$m^{a_1 \dots a_n}\left(e^{(1)}_{b_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{b_n}\right) = \delta^{a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_n}_{b_n}$$

$\{m^{a_1 \dots a_n},\ 1 \leq a_1 \leq m_1, \dots, 1 \leq a_n \leq m_n\}$ forma uma base em $M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$

associada as bases $\{e^{(k)}_1, \dots, e^{(k)}_{m_k}\}$ de V_k, $k = 1, \dots, n$.

Dado $w \in M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$ temos:

$$w(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) = w\left(\sum_{a_1=1}^{m_1} (v_1)^{a_1} e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus \sum_{a_n=1}^{m_n} (v_n)^{a_n} e^{(n)}_{a_n}\right)$$

$$= \sum_{a_1=1}^{m_1} \dots \sum_{a_n=1}^{m_n} \underbrace{(v_1)^{a_1} \dots (v_n)^{a_n}}_{m^{a_1 \dots a_n}(v_1 \oplus \dots \oplus v_n)} w\left(e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{a_n}\right)$$

$$= \sum_{a_1=1}^{m_1} \dots \sum_{a_n=1}^{m_n} w\left(e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{a_n}\right) m^{a_1 \dots a_n}(v_1 \oplus \dots v_n)$$

$$\Rightarrow w = \sum_{a_1=1}^{m_1} \dots \sum_{a_n=1}^{m_n} w\left(e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{a_n}\right) m^{a_1 \dots a_n}$$

Para o espaço dual $(M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n))'$ temos a base dual canônica $\{m_{b_1 \dots b_n},\ 1 \leq b_j \leq m_j,\ j = 1, \dots, n\}$ onde

$$\langle m_{b_1 \dots b_n}, m^{a_1 \dots a_n} \rangle = \delta^{a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_n}_{b_n}$$

Disso segue que:

$$\langle m_{b_1 \dots b_n}, w \rangle = \left\langle m_{b_1 \dots b_n}, \sum_{a_1=1}^{m_1} \dots \sum_{a_n=1}^{m_n} w\left(e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{a_n}\right) m^{a_1 \dots a_n} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{a_n=1}^{m_n} w\left(e^{(1)}_{a_1}\oplus\cdots\oplus e^{(n)}_{a_n}\right)\left\langle m_{b_1\ldots b_n}, m^{a_1\ldots a_n}\right\rangle$$

$$= \sum_{a_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{a_n=1}^{m_n} w\left(e^{(1)}_{a_1}\oplus\cdots\oplus e^{(n)}_{a_n}\right)\underline{\delta^{a_1}_{b_1}\cdots\delta^{a_n}_{b_n}}$$

faz sumir c/ todas as somas, sobrevive apenas $a_1 = b_1, \ldots$

$$\Rightarrow \underline{\left\langle m_{b_1\ldots b_n}, w\right\rangle = w\left(e^{(1)}_{b_1}\oplus\cdots e^{(n)}_{b_n}\right)}$$

Produtos Tensoriais e formas multilineares:

Considerando a aplicação $\psi: V_1\otimes\cdots\otimes V_n \longrightarrow \left(M(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)\right)'$

$$\left\langle \psi\left(\sum_{k=1}^{N} v_1^k\otimes\cdots\otimes v_n^k\right), w\right\rangle := \sum_{k=1}^{N} w\left(v_1^k\oplus\cdots\oplus v_n^k\right)$$

Dado $T\in V_1\otimes\cdots\otimes V_n$ T é escrito na forma $T = T^{a_1\ldots a_n} e^{(1)}_{a_1}\otimes\cdots\otimes e^{(n)}_{a_n}$ temos:

$$\left\langle \psi\left(T^{a_1\ldots a_n} e^{(1)}_{a_1}\otimes\cdots\otimes e^{(n)}_{a_n}\right), w\right\rangle = T^{a_1\ldots a_n} w\left(e^{(1)}_{a_1}\oplus\cdots\oplus e^{(n)}_{a_n}\right) = 0$$

Se tomarmos $w = m^{b_1\ldots b_n}$ temos:

$$\left\langle \psi\left(T^{a_1\ldots a_n} e^{(1)}_{a_1}\otimes\cdots\otimes e^{(n)}_{a_n}\right), m^{b_1\ldots b_n}\right\rangle = T^{a_1\ldots a_n} m^{b_1\ldots b_n}\left(e^{(1)}_{a_1}\oplus\cdots\oplus e^{(n)}_{a_n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T^{a_1\ldots a_n}\delta^{b_1}_{a_1}\cdots\delta^{b_n}_{a_n} = 0 \Leftrightarrow \underline{T^{a_1\ldots a_n} = 0}, \Rightarrow \underline{\psi \text{ é injetora}}$$

Se $\Omega \in (M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n))'$ teremos

$$\langle \Omega, w \rangle = w(e^{(1)}_{a_1} \oplus \dots \oplus e^{(n)}_{a_n}) \langle \Omega, m^{a_1 \dots a_n} \rangle$$

Disso é possível perceber que: $\Omega = \psi(w)$ onde:

$$W = \langle \Omega, m^{a_1 \dots a_n} \rangle e^{(1)}_{a_1} \otimes \dots \otimes e^{(n)}_{a_n} \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

Com isso temos que ψ é sobrejetora, estabelecendo então o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais:

$$\underbrace{V_1 \otimes \dots \otimes V_n \simeq (M(V_1 \oplus \dots \oplus V_n))'}$$

↳ são canonicamente isomorfos (não depende da base)

vale também:

$$\underbrace{T^{a_1 \dots a_n} e^{(1)}_{a_1} \otimes e^{(2)}_{a_2} \dots \otimes e^{(n)}_{a_n} \equiv T^{a_1 \dots a_n} m_{a_1 \dots a_n}}$$