Transformações Lineares:

Def: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.
Uma função $T: U \to V$ é uma transformação linear se:

i-) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, $\forall\, u_1, u_2 \in U$

ii-) $T(\lambda u) = \lambda \cdot T(u)$ $\forall\, u \in U \wedge \lambda \in \mathbb{K}$.

OBS: $T(0_U) = 0_V$; logo a transformação linear deve levar o vetor nulo em outro vetor nulo, em outro espaço vetorial.

EX:/ Seja

$$
\begin{aligned}
T: \mathbb{K}^3 &\longrightarrow M_2(\mathbb{K}) \\
(a,b,c) &\longmapsto T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

EX:/ Seja $P(\mathbb{C})$ espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{C}$ e considere a função:

$$
\begin{aligned}
D: P(\mathbb{C}) &\longrightarrow P(\mathbb{C}) \\
a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n &\longmapsto a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

D é a função derivação. Como a derivada obedece a definição de ~~esp~~ transformação linear, logo D é uma transformação linear.

obs: Uma transformação linear $T: U \to U$ é chamada de operador Linear.

Seja $T: U \to V$ transformação Linear, $u \in U = \sum_i \alpha_i u_i$, logo $[u_i]$ é uma base de U; temos então:

$$T(u) = T\left(\sum \alpha_i u_i\right) \to \underline{\sum \alpha_i T(u_i)}$$

Logo; podemos concluir que uma transformação linear opera nos vetores de base;

Teorema: Sejam U e V espaços vetoriais. Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ for base de U e se $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Então existe uma única transformação linear $T: U \to V$ tal que $\underline{T(u_i) = v_i}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Quick Reminder; injetora, sobrejetora, bijetora

DEF: Uma aplicação $T: U \to V$ é injetora se e somente se:

$$\forall u_1, u_2 \in U, \quad T(u_1) = T(u_2) \Longleftrightarrow u_1 = u_2$$

DEF: Uma aplicação $T: U \to V$ é sobrejetora se e somente se:

$Im(T) = V$, ou seja $\forall v \in V, \exists u \in U; F(u) = v$.

DEF: Uma aplicação $T: U \to V$ é bijetora se e somente se for injetora e sobrejetora.

obs: Se $T: U \to V$ é bijetora é possível definir uma aplicação inversa denotada por T^{-1} onde $T^{-1}: V \to U$; com:

$$\underset{\forall u \in U}{T^{-1}(T(u)) = u} \quad ; \quad \underset{\forall v \in V}{T(T^{-1}(v)) = v}$$

Núcleo e Imagem:

Definições: Sejam U e V espaços vetoriais e $T: U \to V$ transformação linear.

a) Denomina-se Núcleo de T o conjunto: (ker ou Nuc)

$$\ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$$

b) Denomina-se imagem de T o conjunto:

$$Im(T) = \{v \in V \mid \exists\, u \in U \text{ com } T(u) = v\}$$

Proposição: a) $\ker(T)$ é subespaço vetorial de U e $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.

b) T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{0\}$.

$\dim[\ker(T)] \to$ posto de T

$\dim[Im(T)] \to$ nulidade de T.

Exemplo: Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$

$$(a, b, c) \longmapsto \begin{pmatrix} a+b & 6 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}$$

Um elemento $(a,b,c) \in \ker(T)$ se $a+b=0 \wedge c-b=0 \Rightarrow a=-b \wedge c=b$

portanto teremos:

$$\ker(T) = \{(-b,b,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$; note que $\{(-1,1,1)\}$ é base de $\ker(T)$

e portanto temos $\dim(\ker(T)) = 1$.

Lema: Sejam U e V espaços vetoriais e $T: U \to V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de U, então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é base de ImT.

Teorema: Sejam U e V espaços vetoriais, com dim U finita e $T: U \to V$ transformação linear, então:

$$\boxed{\dim U = \dim Ker(T) + \dim Im(T)}$$

Corolário: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com mesma dimensão finita n. e $T: U \to V$ transformação linear. São equivalentes:

I-) T é sobrejetora

II-) T é bijetora

III-) T é injetora

IV-) T transforma uma base de U em uma base de V.

Isomorfismo e Automorfismo:

DEF: Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T: U \to V$ uma transformação linear. Se T for bijetora, então dizemos que ela é um Isomorfismo.

ii-) Se $T: U \to V$ é um Isomorfismo, dizemos que U e V são isomorfos, indicando por: $U \cong V$.

Proposição: Se $T: U \to V$ é um isomorfismo. $T^{-1}: V \to U$ também é.

Em especial se $T: U \to U$ for injetora, o chamamos de Automorfismo.

Proposição: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de mesma dimensão finita $n \geq 1$ e $T: U \to V$ uma transformação linear. Então são equivalentes:

I-) T é um isomorfismo

II-) T é injetora

III-) T é sobrejetora

Teorema: Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.

demonstração:

i-) $T: U \to V$ isomorfismo; então $\ker T + \operatorname{Im} T = V$, mas devido ao teorema do núcleo e imagem $\dim U = \ker T + \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim U = \dim V$.

ii-) Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de U e V respectivamente e considere $T: U \to V$ dada por $T\left(\sum \alpha_i u_i\right) = \sum \alpha_i v_i$. Assim, T é linear.

Supondo $\sum \alpha_i v_i = 0$, como C é L.I então $\alpha_i = 0$ e portanto $\sum \alpha_i u_i = 0$.

Donde T é injetora. Pela proposição anterior temos que se T é injetora, T é um isomorfismo. ∎.

Lema: Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T: U \to V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \dots u_n\}$ é uma base de U, então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $\operatorname{Im} T$.

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ Base de U.

Seja $w \in U$. Então, w pode ser escrito como combinação linear de B.

$w = \sum w_i u_i$. Aplicando a transformação linear T em w, temos:

$T(w) = T\left(\sum w_i u_i\right) \Rightarrow \sum w_i T(u_i)$. Logo, temos que a transformação linear T age nos vetores de base. No entanto temos que T leva um elemento de U ao espaço vetorial V. Logo $T(w) = v \in V$.

$v = \sum w_i T(u_i)$ que pode ser escrito como combinação linear de elementos $T(u_i)$. Portanto $\{T(u_1), \dots T(u_n)\}$ é base de V.

Como B é base de U, todos os elementos de U podem ser levados a V por T e como $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é a base desses elementos, ela gera a imagem de T, $\operatorname{Im} T$. ∎

Matrizes de Transformações Lineares.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m respectivamente.
Considerando uma transformação linear $T: U \to V$, temos que dada uma base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ de V. A transformação T age na base B e leva cada vetor $u_i \in U$ para $T(u_i) \in V$ e portanto podem ser escritos como combinação linear da base C:

$$T(u_1) = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \dots + \alpha_{m1} v_m$$

$$\vdots$$

$$T(u_n) = \alpha_{1n} v_1 + \alpha_{2n} v_2 + \dots + \alpha_{mn} v_m$$

$$\Downarrow$$

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz.}}}{\alpha_{ij}} v_i$$

<u>Definição:</u> A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

$$[\alpha_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

É chamada <u>matriz T em relação as bases B e C</u>, se utilizando de duas notações diferentes: $(T)_{B,C}$ ou $(T)^{B}_{C}$

Obs: Se T for um operador linear ($T: U \to U$) e $B = C$ então dizemos simplesmente matriz de T em relação a base B. T_B.

Composição de Transformações Lineares:

Teorema: Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: W \to U$ transformações lineares, e α, β, γ bases de V, W, U respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2; $T_2 \circ T_1: V \to U$ é:

$$\begin{tikzcd}
 & W \; (\beta) \arrow[dr, "T_2"] & \\
(\alpha)\; V \arrow[ur, "T_1"] \arrow[rr, "T_2 \circ T_1"] & & U \; (\gamma)
\end{tikzcd}$$

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T_1]^{\alpha}_{\beta}$$

Caminho a ser seguido: $\underset{(\alpha)}{V} \xrightarrow{T_1} \underset{(\beta)}{W} \xrightarrow{T_2} \underset{(\gamma)}{U}$

Composição: $T_2 \cdot T_1$ (sempre no 'caminho' inverso multiplicação se da na ordem contrária).

Corolário: $T: V \to W$, isomorfismo. Logo existe inversa T^{-1} e sejam α e β bases de V e W. Então temos:

$$\begin{tikzcd}
(\alpha)\; V^{\alpha} \arrow[r, shift left, "T"] & (\beta)\; W \arrow[l, shift left, "T^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = \left([T]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1}$$

Analisando agora um caso mais genérico, onde antes de realizar a transformação linear, realizamos uma mudança de base.

$$
\begin{tikzcd}
 & \alpha_V \arrow[r, "T"] & \beta_W \arrow[d, "I"] \\
\alpha'_V \arrow[ur, "I"] \arrow[rr, "T"] & & \beta'_W
\end{tikzcd}
$$

onde $I \rightarrow$ matriz mudança de base.

Caminho: $\underset{\alpha'}{V} \xrightarrow{I_{\alpha}^{\alpha'}} \underset{\alpha}{V} \xrightarrow{T_{\beta}^{\alpha}} \underset{\beta}{W} \xrightarrow{I_{\beta'}^{\beta}} \underset{\beta'}{W}$

Composição: $I_{\beta'}^{\beta} \cdot T_{\beta}^{\alpha} \cdot I_{\alpha}^{\alpha'} = T_{\beta'}^{\alpha'}$

<u>Caso Particular</u>: Digamos que sabemos a forma matricial de uma transformação linear (nesse caso, operador linear) entre ~~das~~ a bases C do mesmo espaço vetorial. A fim de descobrir a forma matricial de T em relação apenas a base B (T_B); traçamos o seguinte caminho:

$$
\begin{tikzcd}
 & C_V \arrow[r, "T_C"] & C_V \arrow[d, "I"] \\
B_V \arrow[ur, "I"] \arrow[rr, "T_B"] & & B_V
\end{tikzcd}
$$

Caminho: $B \xrightarrow{I_C^B} C \xrightarrow{T_C} C \xrightarrow{I_B^C} B$

mas pelo corolário anterior

$$I_C^B = (I_B^C)^{-1} = M \Rightarrow I_B^C = M^{-1}$$

logo temos: $T_B = I_B^C \, T_C \, I_C^B \Rightarrow \boxed{T_B = M^{-1} T_C M}$

Observação:

Dada duas matrizes quadradas de mesma ordem P e Q.

Dizemos que P e Q são semelhantes se e somente se existir uma matriz inversível M de modo que:

$$P = M^{-1} Q M$$

mas também vale a recíproca: $Q = M^{-1} P M$. Então temos que P e Q representam o mesmo operador linear.

Def: Uma matriz quadrada se diz diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal. Logo, existe uma certa base $\{e_i\}$ onde T_{e_i} é uma matriz diagonal.

Autovetores e Autovalores:

Dado $T: V \to V$ operador linear, existem certos vetores que são "passivos" as transformações lineares, sendo apenas escalados. Nos gerando então, a definição a seguir:

$$\boxed{T|v\rangle = \lambda|v\rangle}$$

Autovetor

Autovalor ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Com $|v\rangle \neq 0$ obviamente.

i-) O escalar λ é univocamente determinado por T e $|v\rangle$ pois:

$$T(v) = \lambda v = \lambda' v \Rightarrow (\lambda - \lambda')v = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'$$

ii-) Fixando λ, teremos que o conjunto $\{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ é um Sub-espaço vetorial de V pois $T(v) = \lambda v \Rightarrow (T - \lambda \mathbb{I})v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(T - \lambda \mathbb{I})$

Esse subespaço é conhecido como <u>auto espaço de λ</u>, indicado por $V(\lambda)$.

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

Como calculá-los?

$$T|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

$$T|v\rangle - \lambda|v\rangle = 0 \Rightarrow (T - \lambda\mathbb{I})|v\rangle = 0$$

$$\underbrace{(T-\lambda \mathbb{I})}_{A}|v\rangle=0$$

$$A|v\rangle=0 \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$$

Note que se A é invertível então: $A^{-1}A|v\rangle=0.A^{-1}=\mathbb{I}|v\rangle=0$

$$\Rightarrow \boxed{|v\rangle=0}$$

Autovetor nulo. Solução mais trivial e nada interessante; por isso precisamos exigir que A não admita inversa; logo $\det A=0$; Portanto os Autovalores de uma transformação linear são calculados por:

$$\boxed{\det(T-\lambda\mathbb{I})=0}$$

↳ isso irá dar origem a algum polinômio. Dizemos que esse é o Polinômio Característico de T ⟶ Autovalores são justamente as raízes do polinômio característico.

Obs.: matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

↳ independe da base a qual T esteja expressa.

↳ pois são matrizes semelhantes tendo em vista que representam o mesmo operador linear.

→ Dizemos ainda que a multiplicidade geométrica de um autovalor λ é a dimensão do subespaço V_λ de autovetores associados a λ.

Teorema: Autovetores não nulos de autovalores distintos são linearmente independentes. → base dos autovetores

Diagonalização de Operadores

A ideia principal é buscar uma base na qual referente a esta uma tranformação linear, em forma matricial se apresenta da sua forma mais simples, uma matriz diagonal (Esse resultado é de extrema importância para contas futuras na área da Física).

Um corolário do teorema acima é:

Corolário: V espaço vetorial de $\dim = n$. $T: V \to V$ operador com n autovetores distintos, então V possui uma base cujos elementos são os autovetores de T.

Esse corolário, garante a existência de uma base de autovetores.

Digamos que num espaço vetorial V de $\dim V = N$ uma matriz T possua M autovetores; em geral teremos:

$$\begin{cases} M = N \to \text{matriz diagonalizável, decomposição espectral.} \\ M < N \to \text{não diagonalizável, forma de Jordan.} \end{cases}$$

Como foi mostrado, uma maneira de saber se uma matriz é diagonalizável é por meio da dimensão do espaço vetorial e do número de autovalores. No entanto nem sempre isso é prático. Existe outra maneira de descobrir se a matriz é diagonalizável.

Polinômio Minimal:

Def: Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então $p(A)$ é a matriz

$$p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

quando $p(A) = 0$ dizemos que o polinômio anula a ~~~~ matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$$

tal que:

i-) $m(A) = 0$, anula a matriz

ii-) menor grau entre aqueles que anulam A.

Teorema: Sejam $T: V \to V$ operador linear. T é diagonalizável se o polinômio minimal de T for da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \dots (x - \lambda_r)$$

Com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ distintos.

Teorema de Hamilton-Cayley: Seja $T: V \to V$ operador linear e $p(x)$ polinômio característico de T, então:

$$p(T) = 0$$

Logo, o polinômio característico é um candidato a polinômio minimal.

Teorema: As raízes do polinômio minimal são as mesmas do polinômio característico.

Teorema: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se o polinômio

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_r)$$

anular a matriz T.

Exemplo: O operador linear $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?

Calculando o polinômio característico; $p(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2, os possíveis polinômios minimais são:

$P_1(x) = (x-3)(x+1) \rightarrow$ T será diagonalizável se P_1 for o polinômio minimal (se adequa a forma do teorema)

$P_2(x) = (x-3)^2(x+1)$

$P_3(x) = (x-3)(x+1)^2$

$P_4(x) = (x-3)^2(x+1)^2$

Note que $P_1(T) = 0 \Rightarrow$ T é diagonalizável.

Outro método para o cálculo de uma matriz inversa:

Calculando o polinômio característico de uma matriz A temos:

$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$; Pelo Teorema de Hamilton-Cayley $p(A) = 0$

$= a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 \mathbb{I}$; Supondo que $\exists\, A^{-1}$ multiplicamos ambos os lados;

$$0 \cdot A^{-1} = A^{-1}(a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 \mathbb{I}) \Rightarrow a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_0 A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow -a_0 A^{-1} = a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{I}\right)}$$

Logo, a condição de existência de inversa; é que $a_0 \neq 0$ no polinômio característico.

Como vimos anteriormente, se T é uma matriz diagonalizável, existe uma base onde T com respeito a essa base é uma matriz diagonal. No caso, essa base é a base dos autovetores.

A diagonalização de T é feita da seguinte forma. Seja A a base dos autovalores e B uma outra base qualquer. Sabemos que T_A é diagonal e possuímos T_B. Montamos então o caminho:

$$A \xrightarrow{I_B^A} B \xrightarrow{T_B} B \xrightarrow{I_A^B} A \quad \text{(caminho)}$$

$$I_A^B \, T_B \, I_B^A \quad \text{(operação composta)}$$

O que nos leva a:

$$T_A = I^B_A \, T_B \, I^A_B \qquad \text{sendo } I^A_B = M \Rightarrow I^B_A = M^{-1}$$

logo: $\boxed{T_A = M^{-1} T_B M}$

em especial, se B é a base canônica, temos que

$$\cancel{M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & w_n & u_n \end{pmatrix}}$$ ~~onde v_i, w_i, u_i são as componentes~~

$$M = \begin{pmatrix} \text{autovetor } 1 & \text{autovetor } 2 & \cdots \end{pmatrix} = [\,|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots |n\rangle\,]$$

Esse, é o processo de diagonalização de um operador linear. Entretanto, algumas ressalvas devem ~~serem~~ ser feitas, a respeito de classes especiais de matrizes e matrizes não diagonalizáveis que recaem na forma de Jordan.

Espaços com Produto Interno:

Definição: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre V é uma função $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades:

I-) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\forall u, v, w \in V$.

II-) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$

III-) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, $\forall u, v \in V$

IV-) $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$

OBS:

i-) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda} \, \overline{\langle v, u \rangle}$

Exemplo 1: $V = \mathbb{K}^n$; produto interno canônico:

$$\langle (x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

note que também é produto interno: $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i}^{n} \alpha_i x_i \overline{y_i}$ onde $\alpha_i > 0$

Exemplo: $V = C([a,b], \mathbb{K})$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$

O produto interno canônico em $C([a,b], \mathbb{K})$ é definido como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$$

Exemplo: O produto interno canônico em $V = M_n(\mathbb{K})$ é dada por:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

onde $A = (a_{ij})_{ij}$ e $B = (b_{ij})_{ij}$ são matrizes de V.

Norma e Distância:

Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u,v) \to \langle u, v \rangle$. Dado um vetor $u \in V$ indica-se por $\|u\|$ e chama-se norma de u o número real dado por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

→ Em todo espaço euclidiano V temos:

a) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in V$

b) $\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$ e $\|u\| = 0 \iff u = 0$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$, $\forall u, v \in V$

Dem: Se $v = 0$ $\langle u, v \rangle = 0$ e $|u| |v| = 0 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| = |u| \cdot |v|$, pensando agora em $v \neq 0$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade $\|u + \alpha v\|^2 \geq 0$. Daí temos:

$$0 \leq \|u+\alpha v\|^2 = \langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,\alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \alpha\langle u,v\rangle + \alpha\langle v,u\rangle + \alpha^2\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \underbrace{\alpha^2\|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle\alpha + \|u\|^2}_{ax^2+bx+c}$$ que é sempre positivo, logo seu

descriminante deve ser negativo ou nulo ($\Delta \leq 0$)

$$4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\cdot\|v\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|}\,,$$

<u>Corolário</u>: <u>Desigualdade Triangular</u>: $\boxed{\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|}$ $\forall u,v \in V$

<u>Dem</u>: $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

$$= |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u|+|v|)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq (|u|+|v|)^2 \Rightarrow \underline{\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|}\,,$$

<u>Exemplo</u>: Considerando no $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual e se $u=(x_1,\dots,x_n)$ e $v=(y_1,\dots,y_n)$ vetores quaisquer no $\mathbb{R}^n$ então teremos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle u,v\rangle| \leq |u|\,|v|$; o que nos leva a:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}$$

propriedade esta, que é conhecida como desigualdade de Lagrange.

Pensemos agora um espaço vetorial V euclidiano. Considere a aplicação, $\underline{d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}}$, definida por:

$$d(u,v) = \|u-v\|, \ \forall u,v \in V$$

Cujas propriedades são satisfeitas:

I-) $d(u,v) \geq 0, \forall u,v \in V$ e $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

II-) $d(u,v) = d(v,u), \forall u,v \in V$

III-) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \ \forall u,v,w \in V$, pois

$$d(u,v) = |u-v| = |u-w+w-v| \leq |u-w| + |w-v|$$

Temos então que $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de métrica sobre V, induzida pela norma. O número $d(u,v)$ é a distância de u a v.

Ortogonalidade:

Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que dois vetores são ortogonais ($u, v \in V$) se e somente se $\langle u, v \rangle = 0$.

Um conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ se diz ortonormal se e somente se; $|u_i| = 1$ e $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Essas duas condições podem ser subistituidas por

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Proposição: Todo conjunto ortonormal $S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ contido num espaço vetorial euclidiano é necessariamente L.I.

Dem: temos: $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r = 0$. Então:

$$0 = \langle 0, g_1 \rangle = \langle \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_r g_r, g_1 \rangle = \alpha_1 \langle g_1, g_1 \rangle + \alpha_2 \langle g_2, g_1 \rangle$$

$+ \dots + \alpha_r \langle g_r, g_1 \rangle = \underline{\alpha_1 = 0}$. O mesmo processo é refeito $r-1$ vezes; chegando a: $\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0}$. Logo $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ é LI.

Proposição: Seja $S = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ subconjunto ortonormal do espaço euclidiano V. Então, $\forall u \in V$, o vetor $v = u - \langle u, g_1 \rangle g_1 - \dots - \langle u, g_r \rangle g_r$ é ortogonal a todo vetor do sub-espaço gerado pelos vetores de S.

Definição: Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se um conjunto $B = \{g_1, \dots, g_n\}$ for base de V e simultaneamente um conjunto ortonormal, então B é uma base ortonormal de V.

Teorema: Todo espaço vetorial euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormal.

Dem:

Se $\dim V = 2$; seja $\{u_1, u_2\}$ base de V. Façamos $g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Então o vetor $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1$ é ortogonal a g_1 devido a proposição anterior. Logo $g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ também é ortogonal a g_1 além de ser unitário. Daí $\{g_1, g_2\}$ é uma base ortonormal de V. O mesmo processo acontece se $\dim V = n$. A este processo chama-se

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Exemplo: Aplicar Gram-Schmidt a base $B = \{u_1 = (1,0,0); u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,1,2)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

Temos que $g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (1,0,0)$. Por outro lado, $v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1\rangle g_1$

$= (0,1,1) - 0(1,0,0) = (0,1,1)$. Logo $g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

Finalmente, $v_3 = u_3 - \langle u_3, g_2\rangle g_2 - \langle u_3, g_1\rangle g_1$

$= (0,1,2) - 0g_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Daí: $g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{2}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Logo $\{g_1, g_2, g_3\} = \left\{(1,0,0); \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dado um sub-espaço vetorial U de V ($U \subset V$); indiquemos por $U^\perp$ o seguinte subconjunto de V:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U\}$$

Notemos que $U^\perp$ é um sub-espaço

i-) $\langle v_1, u\rangle = \langle v_2, u_2\rangle = 0, \forall u \in U \Rightarrow \langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = 0$

ii-) $\langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U \Rightarrow \langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in U$.

Definição: O sub-espaço $U^\perp$ definido anteriormente recebe o nome de complemento ortogonal de U,

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$; $U = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$. Então $U^\perp = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

Proposição: Seja U um sub-espaço vetorial de um espaço euclidiano de dimensão finita V. Então $V = U \oplus U^\perp$ ($U \cap U^\perp = \{0\}$)

Definição: Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Um operador linear $T: V \to V$ com a propriedade:

$$\|T(u)\| = \|u\|, \quad \forall u \in V,$$

se denomina Isometria sobre V ou operador ortogonal sobre V

Logo, temos que uma Isometria sobre um espaço vetorial preserva a norma dos vetores.

EXEMPLO: A rotação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta;\ x\sin\theta + y\cos\theta)$ é uma Isometria sobre $\mathbb{R}^2$. De fato:

$$\|T(x,y)\|^2 = x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$= x^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2 \quad \blacksquare$$

Proposição: Toda isometria $T: V \to V$ é um isomorfismo.

DEM:

$$T(u) = 0 \Rightarrow \|T(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$$

logo $\ker(T) = \{0\} \Rightarrow T$ é injetora $\Rightarrow T$ é um isomorfismo.

Proposição: Seja T um operador linear sobre um espaço euclidiano V

São equivalentes:

i-) T é isometria

ii-) T transforma as bases ortonormais de V em bases ortonormais de V

iii-) $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$.

Proposição: Seja T um operador linear de um espaço euclidiano de dimensão finita. Então T é uma isometria, se e somente se, a matriz de T em relação a uma base ortonormal é uma matriz ortogonal ($AA^{-1} = AA^t = \mathbb{1} \to A^{-1} = A^t$).